Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Centre du Liban Associé au
Conservatoire Nationale des Arts et Métiers – Paris

Electronique B7 : Télécommunications Optiques
Semestre II
Examen Final 2004-2005

Documents autorisés: AUCUN **Durée : 3 h**

Exercice 1 *On considère une fibre optique à gradient d'indice de longueur L exprimée en* km, *de rayon a en* μm.

1. On suppose que la trajectoire du rayon dans un plan méridien est sinusoidale d'amplitude r_m. Etablir la formule du profil d'indice: $n(r) = n_1\sqrt{1 - 2\Delta\left(\frac{r}{a}\right)^{\alpha}}$ en un point à la distance r de l'axe, où n_1 est l'indice au voisinage de l'axe, Δ est la différence relative d'indices et α le paramètre du profil.

2. Schant que l'indice de gaine est $n_2 = 1.45$, et $\Delta = 1.5\%$. Calculer dans le cas du profil parabolique les valeurs d'indice du coeur aux points: $r = 0$, $r = \frac{a}{2}$, $r = \frac{3a}{4}$

3. Calculer la durée de transit du mode qui se propage le long de l'axe de fibre supposée de longueur $L = 50$ km

4. Définir l'ouverture numérique: (ON) d'une fibre optique, Etablir la formule de (ON) en fonction de $n(r)$ et n_2. Quelle est la valeur maximale de (ON)

5. Soit Ω l'angle solide d'injection de la lumière dans la fibre du côté de l'air et Ω_1 celui d'un seul mode. Exprimer Ω_1 en fonction de a et de la longueur d'onde utilisée λ. En déduire le nombre des modes guidés en fonction de Ω et Ω_1.

   $A.N$: $\lambda = 1.06$ μm, $a = 50\,\mu$m

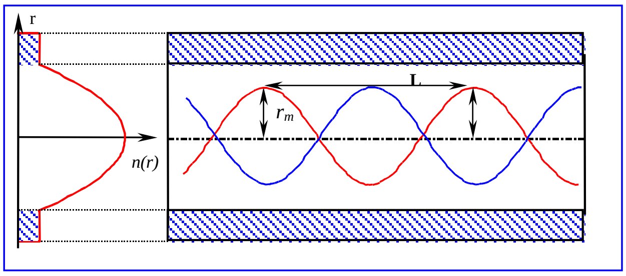
6. La fibre est fabriquée en silice, le seuil de puissance de rupture est de 5 GW/ cm^2. Une impulsion d'énergie 40 mJ et de durée 10 ns est injectée dans la fibre. En prenant une marge de sécurité d'un facteur 5 sur le seuil de rupture de la fibre, calculer son rayon minimum

7. Afin d'obtenir une flexibilité suffisante de la fibre on désire de réduire son diamètre à 200 μm, quelle doit être la durée de l'impulsion?. Cette solution est elle idéale

Solution 1 *:*

1. A une distance maximum r_m le rayon revient vers l'axe de la fibre lorsque l'angle de réfraction devient égal à $\frac{\pi}{2}$.

   Soit $n(r_m)$ l'indice au point r_m il vient : $n_1 \sin\theta = n(r_m)$Cette relation montre que



plus le rayon est éloigné de l'axe plus il est oblique puisque l'indice est une fonction décroissante de r . Si la trajectoire est sinusoïdale de période L (figure) telle que :

$$r(z) = r_m \sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right)$$

La pente de la courbe à l'origine est graphiquement donnée par

$$\left.\frac{dr}{dz}\right|_{z=0} = \frac{2\pi}{L} r_m \cos\left(\frac{2\pi}{L} z\right)\Bigg|_{z=0} = \frac{2\pi}{L} r_m \cong \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$$

d'où : $\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{4\pi^2}{L^2} r_m^2}$ et :

$$n(r_m) = n_1 \sin\theta = n_1 \sqrt{1 - \frac{4\pi^2}{L^2} r_m^2}$$

D'autre part si deux rayons sont injectés dans la fibre d'une part et d'autre de l'axe alors ils se rencontrent sur l'axe sur des distances $\frac{L}{2}$. Tous les rayons seront alors déviés vers l'axe et par suite les ondes dans une fibre optique à gradient d'indice subissent de la focalisation . La constante $g = \frac{2\pi}{L}$ est dite constante de focalisation . En un point quelconque du coeur, à la distance r de l'axe de la fibre l'indice de réfraction s'exprime alors: $n(r) = n_1\sqrt{1 - g^2 r^2}$ En introduisant la différence relative des indices $\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}$ et l'indice de gaine $n_2 = n_1\sqrt{1 - g^2 a^2} \Longrightarrow g^2 = \frac{2\Delta}{a^2}$ le profil d'indice s'écrit:

$$n(r) = n_1 \sqrt{1 - 2\Delta \frac{r^2}{a^2}} = n_1 \sqrt{1 - \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2} \frac{r^2}{a^2}}$$

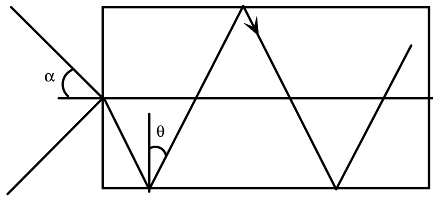
2. $n_2 = 1.45 \qquad \Delta = 1.5\% = 0.015$

$$2\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2} = 1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 = 0.03$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 = 1 - 0.03 = 0.97 \Longrightarrow n_1 = \frac{1.45}{\sqrt{0.97}} = 1.472\,3$$

$$n\,(r) = 1.4723 \sqrt{1 - 0.03 \left(\frac{r}{a}\right)^2}$$

$$n\,(0) = n_1 = 1.4723$$



$$n\left(\frac{a}{2}\right) = 1.4723\sqrt{1-0.03\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1.466\,8$$

$$n\left(\frac{3a}{4}\right) = 1.4723\sqrt{1-0.03\left(\frac{3}{4}\right)^2} = 1.459\,8$$

$$n(a) = 1.4723\sqrt{1-0.03} = 1.45$$

3. $t = \dfrac{L}{v} = \dfrac{L}{c}n_1 = \dfrac{50\times10^3\times1.4723}{3\times10^8} = 2.453\,8\times10^{-4}\,\text{sec}$

4. La lumière se propage à l'intérieur de la fibre par réflexion interne sur l'interface coeur-gaine si l'angle est plus grand de l'angle limite alors si $\sin\theta \geq \dfrac{n_2}{n_1}$ donc il faut injecter la lumière dans la fibre sous l'angle α tel que

   $$\sin\alpha \leq \sin\alpha_c = n_1\cos\theta \leq n_1\sqrt{1-\frac{n_2^2}{n_1^2}} = ON = \sqrt{n_1^2-n_2^2}.$$

   Pour une fibre à gradient d'indice $n = n(r) \Longrightarrow ON = \sqrt{n^2(r)-n_2^2}$

   La valeur maximale de ON est pour $n(r) = n_1 = 1.4723$

   $$ON = \sqrt{(1.4723)^2-(1.45)^2} = 0.255\,28$$

5. l'angle solide d'un cône de révolution d'angle au sommet θ est donné par:

   $$\Omega = 2\pi(1-\cos\theta) = 4\pi\sin^2\frac{\theta}{2} = \pi\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$$

   Dans le cas où θ est faible $\sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} \approx 2\sin\dfrac{\theta}{2}$

   Si θ est l'angle d'acceptance donc on peut exprimer Ω sous la forme:

   $\Omega = \pi\sin^2\theta = \pi(ON)^2$

   Dans une fibre à gradient d'indice de paramètre α le nombre de modes guidés est $M = \dfrac{\alpha}{\alpha+2}\dfrac{(kaON)^2}{2}$

   $$M = \frac{\alpha}{2(\alpha+2)}\left(\frac{2\pi aON}{\lambda}\right)^2 = \frac{\alpha}{2(\alpha+2)}\frac{4\pi a^2}{\lambda^2}\pi(ON)^2 = 2\frac{\alpha}{\alpha+2}\frac{\pi a^2}{\lambda^2}\Omega$$

   $$\Longrightarrow \Omega = M\frac{\alpha+2}{\alpha}\frac{\lambda^2}{2\pi a^2}$$

   Pour $M = 1 \Longrightarrow \Omega_1 = \dfrac{\alpha+2}{\alpha}\dfrac{\lambda^2}{2\pi a^2}$

Si le profil est parabolique $\alpha = 2 \Longrightarrow \Omega = M\dfrac{\lambda^2}{\pi a^2}$ et $\Omega_1 = \dfrac{\lambda^2}{\pi a^2}$

On déduit : $M = \dfrac{\Omega}{\Omega_1}$

$\lambda = 1.06\ \mu m,\ a = 50\ \mu m \Longrightarrow \Omega_1 = \dfrac{(1.06)^2}{\pi\,(50)^2} = 1.430\,6 \times 10^{-4}$ sr

$$M = \frac{\alpha}{\alpha+2}\frac{(kaON)^2}{2} = \frac{(\pi aON)^2}{\lambda^2} = \frac{(\pi 50 \times 0.25)^2}{(1.06)^2} = 139.06\pi^2 \approx 1372$$

$\Omega = M\Omega_1 = 1372 \times 1.430\,6 \times 10^{-4} = 0.196\,28$ sr

6. Facteur de securité $= 5 \Longrightarrow$puissance de rupture $P_r = 1$ GW/ cm^2

   La puissance injectée est $P_i = \dfrac{E}{\Delta t} = \dfrac{40 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-9}} = 4000\,000 = 4$ MW

   Surface de fibre $s = \pi a^2$

   il faut que $\dfrac{P_i}{\pi a^2} \leq P_r \Longrightarrow a^2 \geq \dfrac{P_i}{\pi P_r} = \dfrac{4 \times 10^6}{\pi \times 1 \times 10^9} = \dfrac{1}{250\pi} = 1.273\,2 \times 10^{-3} m^2$

   $\sqrt{1.273\,2 \times 10^{-3}} = 3.568\,2 \times 10^{-2}$

   Il faut que a soit plus grand que 3.568 cm

7. La puissance maximale est $P_M = \pi P_r a^2 = \pi \times 10^9 \times (100 \times 10^{-4})^2 = 3.141\,6 \times 10^5$

   $\Longrightarrow \Delta t_m = \dfrac{E}{P_M} = \dfrac{40 \times 10^{-3}}{3.141\,6 \times 10^5} = 1.273\,2 \times 10^{-7} s = 0.127\,\mu$s

Exercice 2 *Lors de propagation de la lumière la fibre optique s'echauffe à cause de l'absorption et l'énergie optique se transforme en énergie thermique:* $E_T = E_i - E_s = mc_0\Delta T$. *On désire de transmettre une impulsion de puissance* $P_i = 80$ W *et de durée* 0.7 s *et de longueur d'onde* $\lambda = 1.06\,\mu$m. *On propose deux types de fibres:*

- Fibre en Quatrz: Atténuation $\alpha_{dB/km} = 5$ dB/km; rayon $a = 300$ μm, Chaleur massique: $c_0 = 750\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$; densité par rapport à l'eau $d_e = 2.2$; Température de dommage $T_D = 1200\,°\mathrm{C}$

- Fibre en acrylique: $\alpha_{dB/km} = 400$ dB/km; $a = 500$ μm, $c_0 = 1.4 \times 10^3\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$; $d_e = 1.2$; $T_D = 200\,°\mathrm{C}$

Evaluer l'élevation de température à l'intérieur de la fibre due à l'impulsion lumineuse sur 1 mètre de longueur en négligeant les échanges thérmiques avec l'extérieur. Quelle est la fibre le mieux adaptée à l'application.

Solution 2 *Soit* E_i *l'énergie injectée et* E_s *l'énergie après* 1 *mètre donc l'énergie absorbée et transformée en énergie thermique est* $E_T = E_i - E_s = mc_0\Delta T$

L'atténuation sur 1 mètre est $\alpha' = \dfrac{\alpha_{dB/km}}{1000} = 10\log(E_s/E_i) \Longrightarrow E_s = E_i 10^{-\alpha \times 10^{-4}}$
$E_i = P \times \Delta t = 80 \times 0.7 = 56\ J$
$E_s = 56 \times 10^{-\alpha' \times 10^{-4}}$

- Pour la fibre en quartz:

$\alpha = 5dB/km \Longrightarrow E_s = 56 \times 10^{-5\times 10^{-4}} = 55.936$ J
$E_T = 56 - 55.936 = 0.064\,\mathrm{J}$
La masse de 1 mètre est
$m = s \times L \times d_e \times 10^3 = \pi \times (300 \times 10^{-6})^2 \times 2.2 \times 10^3 = 6.2204 \times 10^{-4} kg$
$E_T = mc_0 \Delta T \Longrightarrow \Delta T = \dfrac{E_T}{mc_0} = \dfrac{0.064}{6.2204 \times 10^{-4} \times 750} = 0.13718\,°\mathrm{C}$

- Pour la fibre en acrylique:

$\alpha_{dB/km} = 400$ dB/km $\Longrightarrow E_s = 56 \times 10^{-400\times 10^{-4}} = 51.073$
$E_T = 56 - 51.073 = 4.927$
$m = \pi (500 \times 10^{-6})^2\, 1.2 \times 10^3 = 9.4248 \times 10^{-4} kg$
$\Delta T = \dfrac{4.927}{9.4248 \times 10^{-4} \times 1400} = 3.7341\,°\mathrm{C}$
On remarque que la fibre en Quartz est plus adaptée car l'echauffement est moins et la température de dommage est plus grand que celle en acrylique.

Exercice 3 *On fabrique une diode laser à base de GaAs d'indice* $n = 3.6$*, les dimensions de la cavité sont:* $L = 500$ μm, $w = 1.5$ μm, $d = 0.6$ μm*, l'énergie de gap à* 300 K *est* $E_g = 1.5$ eV*, les pertes intrinséques sont équivalentes à* $\alpha_i = 450$ m^{-1}*. On désigne par* P_i *la puissance optique interne, par* P_s *la puissnace optique de sortie et par* P_e *la puissance électrique appliquée aux bornes de diode. On suppose de plus que le coefficient de réflexion d'une face de la couche active est d'ordre de* 1.

1. Définir la facteur de du gain de seuil . Etablir son expression en fonction de α_i, L et n

2. Déterminer(M) le nombre de modes longitudinaux excité dans la cavité en fonction de L, n, la longueur d'onde λ et la largeur spectrale $\Delta\lambda$. Calculer M si $\Delta\lambda = 0.1\,\mu$m

3. On branche une tension constante aux bornes de diode à travers une résisatnace variable ρ. On mésure P_s pour différentes valeurs de ρ:

ρ, Ω	400	350	300	250	200	150	100	90
P_s, mW	2.80	4.8	7.5	11.25	16.8	26.25	45	51

   Calculer les valeurs moyennes de: L'intensité du courant de seuil I_s, l'éfficacité quantique externe, l'éfficacité quantique interne, et l'éfficacité de conversion électrique.

4. Tracer le graphe de P_s en fonction de l'intensité du courant appliqué I

5. Comment varie le temps de réponse avec ρ.

Solution 3 $n = 3.6, L = 500\mu m, w = 1.5\mu m, d = 0.6\mu m,\ E_g = 1.5,\ \alpha_i = 450m^{-1}$

1. Soit un point M, de la cavité où née une onde d'amplitude A. En traversant une fois la cavité (aller-retour) et après deux réflexions sur les miroirs l'ampliutde en M sera $ARR' \exp(-2\alpha_i L) \exp(2gL)$. où L la longueur de la cavité et R, R' les réflectivités des miroirs , g le facteur de gain net .

L'effet laser déclenche lorsque le gain compense toutes les pertes donc lorsque:

$ARR'\exp(2\,(g-\alpha_i)\,L) \geq A \Longrightarrow 2\,(g-\alpha_i)\,L \geq \ln\dfrac{1}{RR'}$

$\Longrightarrow g \geq g_s = \alpha_i + \dfrac{1}{2L}\ln\left(\dfrac{1}{RR'}\right) = \alpha_i + \alpha_m$

si $R' = 1$, $R = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^2 = \left(\dfrac{3.6-1}{3.6+1}\right)^2 = 0.319\,47$

$g_s = 450 + \dfrac{1}{2\times 500\times 10^{-6}}\ln\left(\dfrac{1}{0.319\,47}\right) = 1591.\,1m^{-1}$

2. Pour avoir une onde stationnaire resonnante il faut avoir conserver la phase en chaque point après deux réflexion sur les miroirs pour une aller-retour $z = 2L$

$\Longrightarrow \dfrac{2\pi n\,(2L)}{\lambda} = 2m\pi \Longleftrightarrow 2nL = m\lambda$

$\Delta\,(2nL) = \Delta\,(m\lambda)$ si le milieu est non dispersif on obtient :

$m\Delta\lambda = \lambda\Delta m \Longrightarrow \Delta m = M = \dfrac{m\Delta\lambda}{\lambda} = 2nL\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$

$E_g = 1.5 \Longrightarrow \lambda_{\mu m} = \dfrac{1.24}{E_{g(eV)}} = \dfrac{1.24}{1.5} = 0.826\,67\ \mu m$

$M = \lfloor 2\times 3.6\times 500\times 10^{-6}\times \dfrac{0.1\times 10^{-6}}{(0.82667\times 10^{-6})^2}\rfloor = 526$

3. $\begin{bmatrix} \rho \\ 400 \\ 350 \\ 300 \\ 250 \\ 200 \\ 150 \\ 100 \\ 90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 12.5 \\ 14.286 \\ 16.667 \\ 20 \\ 25 \\ 33.333 \\ 50 \\ 55.556 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 2.\,8 \\ 4.\,8 \\ 7.\,50 \\ 11.\,25 \\ 16.\,8 \\ 26.\,25 \\ 45.0 \\ 51 \end{bmatrix}$

On a $P = \eta E_g\,(I - I_s) \Longrightarrow \dfrac{P}{I - I_s} = \eta E_g = cte$

donc $\dfrac{11.25}{20 - I_s} = \dfrac{45}{50 - I_s} \Longrightarrow I_s = 10$

$\dfrac{4.8}{14.286 - I_s} = \dfrac{7.5}{16.667 - I_s} \Longrightarrow I_s = 10.\,053$

$\dfrac{2.8}{12.5 - I_s} = \dfrac{26.25}{33.333 - I_s} \Longrightarrow I_s = 10.\,012$

$\dfrac{4.8}{14.286 - I_s} = \dfrac{11.25}{20 - I_s} \Longrightarrow I_s = 10.\,034$

$I_s = \dfrac{10 + 10.053 + 10.012 + 10.034}{4} = 10.\,025$

On va prendre $I_s = 10$ mA

Valeur de $\eta_i = \dfrac{P}{(I - I_s)\, E_g}$

$$\frac{2.8}{(12.5 - 10) \times 1.5} = 0.746\,67$$

$$\frac{7.5}{(16.667 - 10) \times 1.5} = 0.749\,96$$

$$\frac{11.25}{(20 - 10)\, 1.5} = 0.75$$

$$\frac{26.25}{(33.333 - 10) \times 1.5} = 0.750\,01$$

Soit $\eta_i = 0.75 = 75\%$

L'efficacité interne est $\eta_{ext} = \eta i \dfrac{\alpha_m}{\alpha_m + \alpha_i}$

$$\alpha_m = \frac{1}{2L} \ln\left(\frac{1}{RR'}\right) = g_s - \alpha_i = 1591 - 450 = 1141$$

$$\eta_{ext} = 0.75 \times \frac{1140}{1591} = 0.537\,40$$

4. *graphe*