Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Electronique B7
Télécommunications Optiques

Première session 2003-2004 **Première composition**

Solutions

Exercice 1 *On considère un guide d'onde planaire symétrique d'épaisseur $h = 30\mu m$, d'indice $n = 1.45$, la couche coeur est plongée dans un milieu d'indice $n_1 = 1.42$. Les modes TE se propagent dans le guide avec des constantes de propagation longitudinales β pour les angles θ: $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} n \sin\theta$. Une section planne est dans le plan (xoz) et $\overrightarrow{\beta} // Oz$. La longueur d'onde utilisée est $\lambda = 1.33\mu m$*

1. *Montrer que les valeurs de β sont quantifiées, donner une expression de β en fonction de λ, h et n . Calculer par suite le nombre des modes qui peuvent être guidés dans tel guide.*
2. *On suppose que l'angle d'incidence du mode TE sur l'interface $n - n_1$ est θ et l'angle de transmission dans le milieu n_1 est θ_1. Donner une expression du champ électrique de l'onde transmise (E_t), si le champ incident est de la forme*

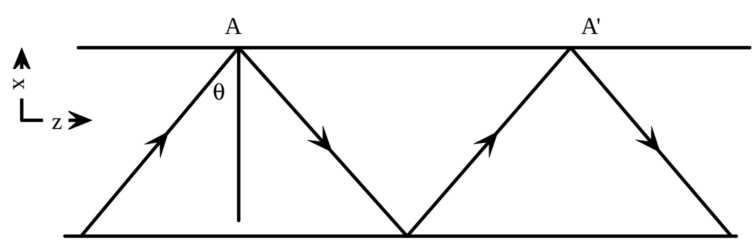
$$E_i = E_0 \exp\left[-j\left(\omega t - n\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r}\right)\right]$$

avec $\overrightarrow{k}$ est le vecteur d'onde et $\overrightarrow{r}$ est le rayon vecteur, discuter la variation de l'amplitude de (E_t) avec θ,que se passe-t-il si $\theta > \theta_\ell = \arcsin\frac{n_1}{n}$

3. *Calculer la profendeur de pénétration de Goos-Hanchen dans le milieu n_1.*

Solution 1 .

1. On suppose que l'onde se propage le long du guide suivant l'axe oz et que $x = 0$ sur l'interface supérieure $n - n_1$et $x = -h$ sur l'interface inférieure. L'onde A subit deux réflexions en $x = 0$ et $x = -h$ pour arriver en $A\prime$.



Chaque fois la réflexion interne totale introduit un déphasage de $-\pi$; de plus la différence de marche optique entre les deux ondes A et A' est $2hn\cos\theta$ ce qui entraîne une différence de phase de $2khn\cos\theta$ .Une condition nécessaire de guidage c'est que les ondes A et A' soient en phase donc :

$$2khn\cos\theta - 2\pi = 2m\pi \qquad m = 0, 1, 2, 3, \tag{1}$$

ou bien :

$$qh = (m+1)\pi \tag{2}$$

où $q = kn\cos\theta$ représente le nombre d'onde transverse. Avec $\beta = kn\sin\theta$ on remarque que kn, q et β sont liés géométriquement par la relation : $q^2 + \beta^2 = k^2n^2$

En substituant dans (2) on trouve:

$$\beta = \sqrt{k^2n^2 - (m+1)^2\frac{\pi^2}{h^2}} \tag{3}$$

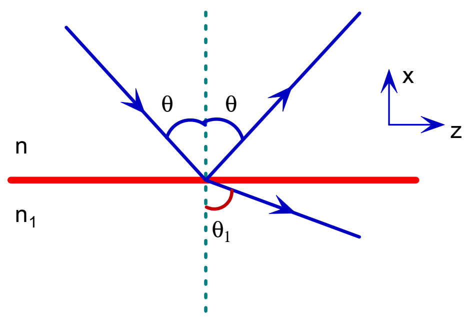
C'est la condition de quantification de la constante de propagation qui démontre que la constante de propagation ne peut prendre que des valeurs discrètes : $\beta_m = \pi\sqrt{\frac{4n^2}{\lambda^2} - \frac{(m+1)^2}{h^2}}$ et il y en a un nombre limité des modes guidés.

La condition de réflexion interne totale: $\sin\theta_m \geq \frac{n_1}{n} \Longrightarrow \cos\theta_m = \frac{(m+1)\,\pi}{knh} \leq \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n^2}}$

$\Longrightarrow (m+1) \leq \frac{knh}{\pi}\sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n^2}} = \frac{2h}{\lambda}\sqrt{n^2 - n_1^2}$

$$M = \frac{2h}{\lambda}\sqrt{n^2 - n_1^2}$$

2. Le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ a deux composantes: $\begin{cases} k_x = -k\cos\theta \\ k_z = k\sin\theta \end{cases}$



donc l'onde incidente s'exprime: $E_i = E_0 \exp\left[j\left(\omega t - knz\sin\theta + knx\cos\theta\right)\right]$

et l'onde transmise est: $E_t = E_0' \exp\left[j\left(\omega t - kn_1 z\sin\theta_1 + kn_1 x\cos\theta_1\right)\right]$

Si $\theta > \theta_\ell = \arcsin\left(\frac{n_1}{n}\right)$ la lumière subit une réflexion totale et par suite $\cos\theta_1$est imaginaire:

$\cos\theta_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{n\sin\theta}{n_1}\right)^2} = j\sqrt{\left(\frac{n\sin\theta}{n_1}\right)^2 - 1} = jB$

L'onde transmise est donc:

$E_t = E_0' \exp\left[j\left(\omega t - kn_1 z\sin\theta_1 + jk\sqrt{n^2\sin^2\theta - n_1^2}\right)\right]$

$\quad = E_0' \exp\left(-k\sqrt{n^2\sin^2\theta - n_1^2}x\right)\exp\left[j\left(\omega t - knz\sin\theta\right)\right] = E_0' \exp\left(-\gamma x\right)\exp\left[j\left(\omega t - \beta z\right)\right]$

· L'amplitude de l'onde ne peut que décroître en s'éloignant de la surface vers $x > 0$, dans le milieu n_1 alors le facteur $\exp(-jn_1k)(-jBx)$ tend vers zéro si x dévient infini

· L'onde se propage le long de l'interface de deux milieux et s'amortisse exponentiellement en fonction de z, il s'agit d'une onde évanescente.

· Pour $\theta \simeq \theta_\ell$ $\quad B$ est voisin de zéro et le champ peut s'étendre assez loin.

Pour $\theta >> \theta_\ell$ la décroissance du champ dans le second milieu est très rapide et il s'annule à une distance de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde λ

Le coefficient de réflexion s'écrit:

$r_\perp = \frac{n\cos\theta - j\sqrt{n^2\sin^2\theta - n_1^2}}{n\cos\theta + j\sqrt{n^2\sin^2\theta - n_1^2}} = \frac{A + jB}{A - jB} = e^{-2j\delta}$ où $\delta = \arctan\left(\frac{B}{A}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{n^2\sin^2\theta - n_1^2}}{n\cos\theta}\right)$

δ est la déphsage entre les ondes incidentes et réflechie.

3. La profendeur de pénétration est: $x_p = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - k^2 n_1^2}}$

Exercice 2 *Soit une fibre optique à saut d'indice de longueur $L = 10$ km, de rayon du coeur $a = 40\mu m$ et de différence relative d'indice $\Delta = 1\%$. Cette fibre peut guider au maximum 1000 modes de longueur d'onde $\lambda = 1.55\mu m$*

1. *Calculer les indices des couches coeur (n) et gaine (n_1)*
2. *Montrer qu'il faut injecter la lumière dans la fibre à l'intérieure d'une cone de révolution d'angle au sommet α_c pour avoir de modes guidés. Exprimer α_c en fonction des indices n_1 et n. Calculer α_c*
3. *Etablir l'expression de la dispersion intermodale. En négligeant les dipersions intramodales et chromatiques, de combien s'étale l'impulsion à la sortie de la fibre*
4. *On suppose que toute la puissance optique initiale $P_0 = 10$ mW est équi-distribuée entre les modes de la fibre, quelle est la puissance portée par chaque mode à la sortie de la fibre d'atténuation linéaire $\alpha_{dB} = 0.3$ dB/km*

Solution 2 $L = 10$ km, $a = 40\mu m$ $\Delta = 1\%$. $M = 1000$, $\lambda = 1.55\mu m$

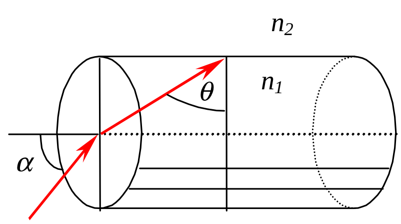
1. *Fibre à saut d'indice donc* $M = \dfrac{2\pi^2 a^2 \left(n^2 - n_1^2\right)}{\lambda^2}$

   $\Longrightarrow ON^2 = \left(n^2 - n_1^2\right) = \dfrac{M\lambda^2}{2\pi^2 a^2} = \dfrac{1000 \times (1.55)^2}{2 \times \pi^2 \times (40)^2} = 0.0\,760\,7 \Longrightarrow ON = \sqrt{0.0\,760\,7} = 0.\,275\,81$

   $\Delta = \dfrac{n^2 - n_1^2}{2n^2} \Longrightarrow n = \sqrt{\dfrac{ON^2}{2\Delta}} = \sqrt{\dfrac{0.0\,760\,7}{0.02}} = 1.\,950\,3 \simeq 1.95$

   $n_1 = \sqrt{n^2 - ON^2} = \sqrt{(1.\,950\,3)^2 - 0.0\,760\,7} = 1.\,930\,7 \simeq 1.93$

2. *Si θ est l'angle d'incidence sur l'interface coeur-gaine, on aura de réflexion interne totale si $\theta > \theta_\ell$ alors*

   si $\sin\theta \geq \dfrac{n_1}{n}$ *donc il faut injecter la lumière dans la fibre sous l'angle α tel que*

   $\sin\alpha \leq \sin\alpha_c = n\cos\theta \leq n\sqrt{1 - \dfrac{n_1^2}{n^2}} = \sqrt{n^2 - n_1^2} = ON$

   $\alpha_c = \arcsin(ON) = \arcsin(0.\,275\,81) = \ 0.\,279\,43\,\mathrm{rad} = 16.\,01\,^\circ$

3. *La cause principale de dispersion est donc celle intermodale*

   $\Delta t = \dfrac{Ln^2\Delta}{cn_1} = \dfrac{10^4 \times (1.95)^2 \times 0.01}{3 \times 10^8 \times 1.93} = 6.\,567\,4 \times 10^{-7}\,\mathrm{sec} = 0.65\mu s$

4. $\alpha_{dB} = -0.3dB/km$ *la longueur de la fibre est 10km donc la perte est de 3dB c-à-d. la puissance devient la moitiée à la sortie c.à.d. 5mW la puissance de chaque mode est donc $5\mu W$.*

Exercice 3 *On considère une diode laser de couche active à la base de GaAs ($\varepsilon = 13.2$) pour la longueur d'onde $\lambda = 0.850$ μm. La longueur de la cavité est $L = 400$ μm*

1. *Si les pertes intrinsèques sont équivalentes à $\alpha_i = 450$ m^{-1}. Etablir l'expression du facteur du gain de seuil et calculer sa valeur numérique.*

2. *On suppose que le milieu est dispersif dont l'indice du groupe est* $N_g = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} = 4.5$. *Calculer le nombre des modes longitudinaux excités. Calculerl'intervalle en longueur d'onde et en fréquence entre deux modes successifs.*

3. *Sachant que l'intensité du courant de seuil est* $I_s = 35\ mA$ *et l'efficacité quantique interne est* $\eta_i = 70\%$. *quelle est la puissance optique interne sous l'intensité* $I = 45mA$. *quelle est la puissance sortie dans l'aire par une face.*

Solution 3 $\varepsilon = 13.2 \Longrightarrow n = \sqrt{13.2} = 3.63$

1. Soit un point M, de la cavité où née une onde d'amplitude A. En traversant une fois la cavité (aller-retour) et après deux réflexions sur les miroirs l'ampliutde en M sera $AR_1R_2 \exp(-2\alpha_i L)\exp(2gL)$. où L la longueur de la cavité et R_1, R_2 les réflectivités des miroirs , g le facteur de gain net . Pour la diode laser $R_1 = R_2 = R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$.

   L'effet laser déclenche lorsque legian compense toutes les pertes donc lorsque:

   $$AR^2 \exp(2\,(g-\alpha_i)\,L) \geq A \Longrightarrow 2\,(g-\alpha_i)\,L \geq \ln\frac{1}{R^2}$$

   $$\Longrightarrow g \geq g_s = \alpha_i + \frac{1}{L}\ln\frac{1}{R} = \alpha_i + \frac{2}{L}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$$

   $$R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 = R = \left(\frac{3.63-1}{3.63+1}\right)^2 = 0.322\,66$$

   $$g_s = \alpha_i + \frac{1}{L}\ln\frac{1}{R} = 450 + \frac{10^6}{400}\ln\left(\frac{1}{0.32}\right) = 3298.\,6\ \mathrm{m}^{-1}.$$

2. La condition de resonance dans la cavité s'écrit : $2nL = m\lambda$; $m \in \mathbb{N}^*$. La différentiation de cette expression nous donne :

   $$2Ldn = md\lambda + \lambda dm \Longrightarrow 2L\frac{dn}{d\lambda} = m + \lambda\frac{dm}{d\lambda}$$

   $$\Longrightarrow \lambda\frac{dm}{d\lambda} = 2L\frac{dn}{d\lambda} - m = 2L\frac{dn}{d\lambda} - \frac{2nL}{\lambda}$$

   $$\Longrightarrow dm = \frac{d\lambda}{\lambda}\left(2L\frac{dn}{d\lambda} - \frac{2nL}{\lambda}\right) = \frac{2L}{\lambda^2}\left(\lambda\frac{dn}{d\lambda} - n\right)d\lambda$$

   $$\Delta m = \frac{2L}{\lambda^2}\left(n - \lambda\frac{dn}{d\lambda}\right)\Delta\lambda = \frac{2L}{\lambda^2}N_g\Delta\lambda \quad N_g \text{ est l'indice du groupe}$$

   L'espace entre modes est :

   $$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2L\left(n - \lambda\frac{dn}{d\lambda}\right)} = \frac{\lambda^2}{2LN_g}$$

   $$= \frac{(0.85)^2}{2\times 400\times 4.5} = 2.\,006\,9\times 10^{-4}\mu m \simeq 0.2\,\mathrm{nm}$$

   $$\lambda = \frac{c}{\nu} \Longrightarrow \Delta\lambda = -c\frac{\Delta\nu}{\nu^2} = -\frac{\lambda^2}{c}\Delta\nu \Longrightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{2LN_g} = -\frac{\Delta\nu}{c}$$

   $$\Longrightarrow |\Delta\nu| = \frac{c}{2LN_g} = \frac{3\times 10^8}{2\times 400\times 10^{-6}\times 4.5} = 8.\,333\,3\times 10^{10}\,\mathrm{Hz}$$

3. $\eta_i = \dfrac{P_i e}{(I-I_s)\,\hbar\omega} = \dfrac{P_i e\lambda}{(I-I_s)\,hc}$

   $$\Longrightarrow P_i = \eta_i\,(I-I_s)\,\frac{hc}{e\lambda} = \eta_i\,(I-I_s)\,\frac{1.24}{\lambda_{(\mu m)}} = 0.7\times(45-35)\,\frac{1.24}{0.85} = 10.\,212\ \mathrm{mW}$$