Télécommunications Optiques

Deuxième session 2003-2004 — **Première composition**
Documents autorisés: AUCUN — **Durée : 2 heures**

Exercise 1 *On considère un guide d'onde plan, d'indice $n_2 = 1,43$, d'épaisseur $h = 10\mu m$ limité par deux milieu semi infinis d'indice $n_1 = n_2 = 1,41$ dans lequel se propagent les modes TE_m de longueur d'onde $\lambda = 0,9\mu m$*

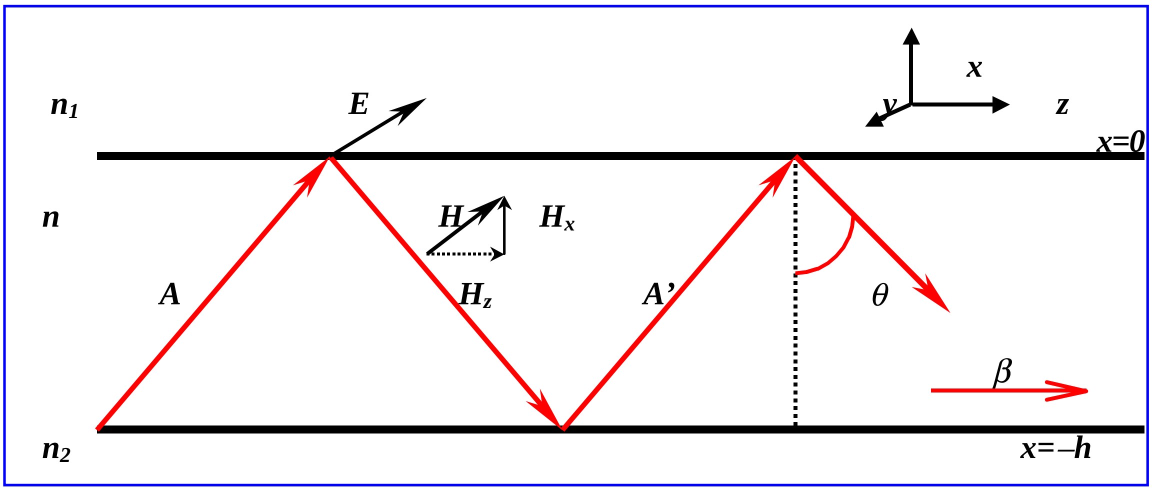
1. Décrire le principe de propagation de la lumière dans ce guide.
2. Démontrer que la constante de propagation β ne peut prendre que des valeurs discrètes et donner l'expression de β en fonction de λ, n, h et en déduire les valeurs quantifiées de l'angle de propagation du mode TE_m.
3. Calculer les valeurs numériques de β_0, β_1, θ_0, θ_1
4. Déduire le nombre maximal des modes guidés.
5. Que doit être l'épaisseur de la couche coeur pour avoir un mode unique.
6. Quelle longueur d'onde faut-il utiliser avec l'épaisseur $h = 4\mu m$ pour considérer le guide comme monomode?
7. De combien se pénètre le mode TE_1 dans le milieu n_1 par l'effet de Goss-Henchen. En déduire la valeur de décalage des rayons incidents et réfléchis et l'épaisseur effective du guide.

Exercise 2 *Une fibre optique à gradient d'indice de longueur $L = 10$ km fabriquée de silice d'indice de coeur $n_1 = 1,52$ au voisinage de l'axe et de rayon $a = 30\mu m$. l'indice de gaine est $n_2 = 1,5$.*

1. Le trajet d'un rayon qui fait un angle θ avec la normale sur l'interface coeur - gaine, dans une section du plan principal, est sinusoïdal d'amplitude r_m. Exprimer en fonction de a, r, n_1, n_2 la valeur de l'indice de réfraction du coeur en un point à la distance r de l'axe.
2. Déduire les valeurs numériques de la constante et de la période de focalisation.
3. Etablir l'expression de l'ouverture numérique et calculer sa valeur numérique. En déduire l'angle d'acceptance
4. Calculer l'atténuation linéique à l'intérieure de la fibre si la puissance décroît de 30% entre l'entrée et la sortie.

Exercise 3 *On considère une diode laser dont les caractéristiques sont : Pertes intrinsèques α_i , indice de réfraction n , dimenssions : $L \times w \times d$, largeur de la bande interdite E_g.*

1. Démontrer que l'effet laser déclenche à partir d'une valeur de seuil du gain g_s qu'on déterminera l'expression .
2. En négligeant la dispersion dans la couche active, déterminer le nombre des modes excités (M) dans telle diode, En déduire l'intervalle de fréquence (Δf) entre deux modes successifs .
3. En tenant compte de la perte due à la réflexion sur les miroirs de la cavité Calculer en fonction de n, L, et α_i la durée de vie du photon(τ_p) à l'intérieur de la cavité.
4. Calculer les valeurs numériques de : g_s, M, Δf, et τ_p .



Solutions

Exercice 1

1. Si l'angle d'incidence θ de l'onde lumineuse sur les interfaces $n - n_1$ et $n - n_2$ est plus grand que l'angle limite$\left(\theta_\ell = \arcsin \frac{n_1}{n}, n > n_2 > n_1\right)$, l'onde subit donc une réflexion interne totale et les rayons se propagent dans la couche coeur suivant un trajet en zig-zag. (figure 1).

Le mode du guide d'onde est la solution de l'équation de propagation d'onde de Maxwell qui l'on écrit dans le mileu d'indice n_i:

$$\overrightarrow{\nabla}^2 E + k^2 n_i^2 E = 0$$

où $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. La solution de cette équation vérifie les conditions de continuité des composantes tangentielles et normales des vecteurs du champ électromagnétique sur les interfaces $n - n_1$ et $n - n_2$. Dans notre cas l'onde se propage le long de l'axe oz, on cherchera alors une solution de la forme : $E(r,t) = E(x,y).exp(j(\omega t - \beta z))$ qui verifie l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \left(k^2 n_i^2 - \beta^2\right) E = 0$$

Cette équation démontre queles modes sont guidés lorsque la constante de propagation est telle que $kn_1 < \beta < kn$.

2. On suppose que l'onde se propage le long du guide suivant l'axe oz et que $x = 0$ sur l'interface $n - n_1$et $x = -h$ sur l'interface $n - n_2$. L'onde A subit deux réflexions en $x = 0$et $x = -h$ pour arriver en $A\prime$. Chaque fois la réflexion interne totale introduit un déphasage de $-\pi$; de plus la différence de marche optique entre les deux ondes A et A' est $2hn\cos\theta$ ce qui entraîne une différence de phase de $2khn\cos\theta$ .Une condition nécessaire de guidage c'est que les ondes A et $A\prime$ soient en phase donc :

$$2khn\cos\theta - 2\pi = 2m\pi \qquad m = 0, 1, 2, 3, ... \tag{1}$$

ou bien :

$$qh = (m+1)\pi \tag{2}$$

où $q = kn\cos\theta$ représente le nombre d'onde transverse. Avec $\beta = kn\sin\theta$ on remarque que kn, q et β sont lier géométriquement par la relation : $q^2 + \beta^2 = k^2n^2$

En substituant dans (2) on trouve:

$$\beta = \sqrt{k^2n^2 - (m+1)^2\frac{\pi^2}{h^2}} \tag{3}$$

C'est la condition de quantification de la constante de propagation qui démontre que la constante de propagation ne peut prendre que des valeurs discrètes : $\beta_m = \pi\sqrt{\frac{4n^2}{\lambda^2} - \frac{(m+1)^2}{h^2}}$ et il y en a un nombre limité des modes guidés.

Avec $q = kn\cos\theta$ on déduit directement :

$\cos\theta_m = \frac{(m+1)\pi}{knh}$ ou d'après $\beta_m = kn\sin\theta_m$ on trouve $\sin\theta_m = \sqrt{1 - \frac{(m+1)^2\pi^2}{k^2n^2h^2}}$

3. $\beta_0 = \pi\sqrt{\frac{4n^2}{\lambda^2} - \frac{1}{h^2}} = \pi\sqrt{\frac{4(1.43)^2}{0.9^2} - \frac{1}{10^2}} = 9.978\,3\ \mu m^{-1}$

$\sin\theta_0 = \frac{\lambda\beta_0}{2\pi n} = \frac{0.9 \times 9.978\,3}{2\times\pi\times 1.43} = .999\,5 \Longrightarrow \theta_0 = \arcsin(.999\,5) = 88.191$

$\beta_1 = \pi\sqrt{\frac{4n^2}{\lambda^2} - \frac{(1+1)^2}{h^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{(1.43)^2}{0.9^2} - \frac{1}{10^2}} = 9.963\,5$

$\sin\theta_1 = \frac{\lambda\beta_1}{2\pi n} = \frac{0.9 \times 9.9635}{2\times\pi\times 1.43} = .998\,02 \Longrightarrow \theta_0 = \arcsin(.99802) = 86.396$

4. La condition $\sin\theta_m \geq \frac{n_2}{n} \Longrightarrow \cos\theta_m = \frac{(m+1)\pi}{knh} \leq \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n^2}}$

$\Longrightarrow (m+1) \leq \frac{knh}{\pi}\sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n^2}} = \frac{2h}{\lambda}\sqrt{n^2 - n_1^2}$

$$M = \frac{2h}{\lambda}\sqrt{n^2 - n_1^2}$$

$M = \frac{2h}{\lambda}\sqrt{n^2 - n_1^2} = \frac{2\times 10}{0.9}\sqrt{1.43^2 - 1.41^2} = 5.296\,2$

5. le guide est monomode donc $M = 1 \Longrightarrow h = \frac{\lambda}{2\sqrt{n^2 - n_1^2}} = \frac{0.9}{2\sqrt{1.43^2 - 1.41^2}} = 1.888\,2\mu m$

6. $h = 4\mu m$ $M = 1 \Longrightarrow \lambda = 2h\sqrt{n^2 - n_1^2} = 2\times 4\times\sqrt{1.43^2 - 1.41^2} = 1.906\,6\mu m$

7. l'effet de Goss-Heanchen démontre la pénétration du mode TE_m dans le mileu extrême d'une quantité $x_m = \frac{1}{\sqrt{\beta_m^2 - k^2n_1^2}}$ Pour le mode TE_1 : $x = \frac{1}{\sqrt{\beta_1^2 - \frac{4\pi^2}{\lambda^2}n_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{(9.963\,5)^2 - \frac{4\pi^2}{0.9^2}(1.41)^2}} = .649\,06\mu m$

L'épaisseur effective est $h^* = h + 2x_1 = 10 + 2\times 0.649\,06 = 11.298\mu m$.

le décalage est $2z; \tan\theta = \frac{z}{x} \Longrightarrow 2z = 2x_1\tan\theta_1 = 2\times 0.649\,06 \times \tan 86.396 = 20.61\mu m$

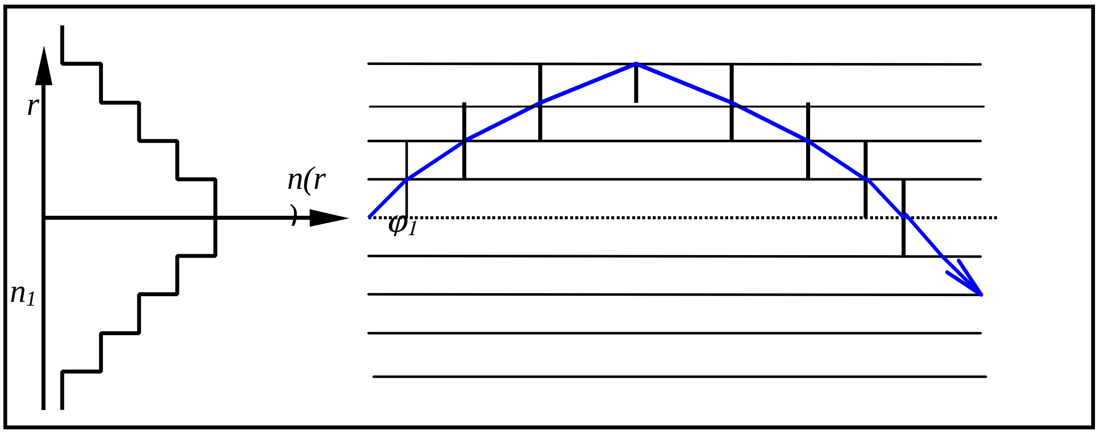
Exercice 2

Dans une fibre à gradient d'indice, l'indice de réfraction du coeur n_1 n'est pas constant mais une fonction du rayon r et change la valeur d'une façon continue le long d'un rayon : elle est maximale sur l'axe et décroît jusqu'à n_2 sur l'interface coeur-gaine. Pour l'étude géométrique dans un plan qui passe par l'axe on peut approcher le profil d'indice par une répartition en escalier à couches très minces dans laquelle chaque couche a un indice de réfraction uniforme (figure2) donc le coeur sera considéré comme un ensemble des couches des indices de réfraction $n_1, n_2, n_3, n_4, ...$ et $n_1 > n_2 > n_3$......

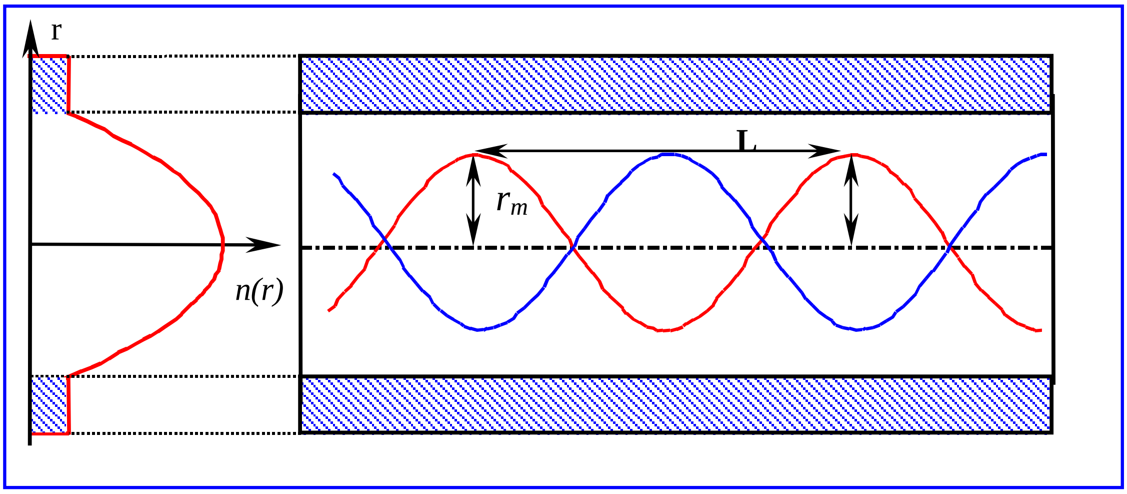
Les angles d'incidence φ_i et les angles de réfraction φ_j sur les interfaces $n_i - n_j; (n_i > n_j)$ vérifient la loi de Snell

$n_i \sin \varphi_i = n_j \sin \varphi_j \Longrightarrow n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2 = n_3 \sin \varphi_3 = ... = cte = n \sin \theta$

puisque $n1 > n_2 > n_3..$ alors $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < ..$ et par suite il arrive une valeur φ_k plus grande que celle de l'angle limite et le rayon subit une réflexion interne totale.



L'approximation sur la trajectoire du rayon sera d'autant meilleure que le nombre de marches sera élevé. En particulier on peut faire tendre l'épaisseur des couches vers zéros , ce qui correspond à une variation continue de l'indice de réfraction désignée par $n(r)$ et le rayon suivi la courbe de la figure3



A une distance maximum r_m le rayon revient vers l'axe de la fibre lorsque l'angle de réfraction devient égal à $\frac{\pi}{2}$. Soit $n(r_m)$ l'indice au point r_m il vient :

$n_1 \sin \theta = n(r_m)$

Cette relation montre que plus le rayon est éloigné de l'axe plus il est oblique puisque l'indice est une fonction décroissante de r . Si la trajectoire est sinusoïdale de période L (figure2) telle que :

$r(z) = r_m \sin \left(\frac{2\pi z}{L} \right)$

La pente de la courbe à l'origine est graphiquement donnée par

$\left. \frac{dr}{dz} \right|_{z=0} = \frac{2\pi}{L} r_m \cos \left(\frac{2\pi}{L} z \right) \Bigg|_{z=0} = \frac{2\pi}{L} r_m \cong \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$

d'où : $\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{4\pi^2}{L^2} r_m^2}$ et :

$$n(r_m) = n_1 \sin\theta = n_1 \sqrt{1 - \frac{4\pi^2}{L^2} r_m^2}$$

D'autre part si deux rayons sont injectés dans la fibre d'une part et d'autre de l'axe alors ils se rencontrent sur l'axe sur des distances $\frac{L}{2}$. Tous les rayons seront alors déviés vers l'axe et par suite les ondes dans une fibre optique à gradient d'indice subissent de la focalisation . La constante $g = \frac{2\pi}{L}$ est dite constante de focalisation . En un point quelconque du coeur, à la distance r de l'axe de la fibre l'indice de réfraction s'exprime alors:

$$n(r) = n_1 \sqrt{1 - g^2 r^2}$$

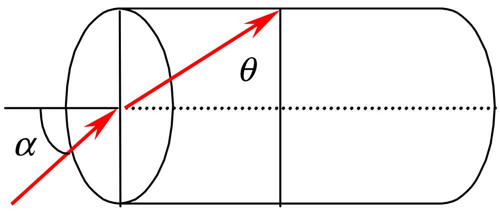
En introduisant la différence relative des indices $\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}$ et l'indice de gaine $n_2 = n_1 \sqrt{1 - g^2 a^2} \Longrightarrow g^2 = \frac{2\Delta}{a^2}$ le profil d'indice s'écrit:

$$n(r) = n_1 \sqrt{1 - 2\Delta \frac{r^2}{a^2}} = n_1 \sqrt{1 - \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2} \frac{r^2}{a^2}}$$

2. $\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} = \frac{1.52^2 - 1.5^2}{2 \times 1.52^2} = 1.307\,1 \times 10^{-2}$

$g = \sqrt{\frac{2\Delta}{a^2}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.307\,1 \times 10^{-2}}{30^2}} = 5.389\,5 \times 10^{-3} \mu m^{-1}$

$L = \frac{2\pi}{g} = \frac{2\pi}{5.389\,5 \times 10^{-3}} = 371.09\pi = 1.1658 mm$



3. La lumière se prpoage à l'intérieur de la fibre par réflexion interne sur l'interface coeur-gaine si l'angle est plus grand de l'angle limite alors si $\sin\theta \geq \frac{n_2}{n_1}$ donc il faut injecter la lumière dans la fibre sous l'angle α tel que

$\sin\alpha \leq \sin\alpha_c = n_1 \cos\theta \leq n_1 \sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}} = ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}.$

$ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \sqrt{1.52^2 - 1.5^2} = 0.245\,76$

$\Longrightarrow \alpha_c = \arcsin(ON) = \arcsin(0.245\,76) = 14.227\,°$

4. $\alpha_{dB/km} = \frac{1}{L} \log_{10}\left(\frac{P_s}{P_e}\right) = \frac{1}{10} \log_{10}\left(\frac{0.7P_e}{P_e}\right) = \frac{1}{10} \log_{10}(0.7) = -.0\,154\,9$ dB/km

Exercice 3

1. Soit un point M, de la cavité où née une onde d'amplitude A. En traversant une fois la cavité (aller-retour) et après deux réflexions sur les miroirs l'ampliutde en M sera $AR_1R_2 \exp(-2\alpha_i L) \exp(2gL)$. où L la longueur de la cavité et R_1, R_2 les réflectivités des miroirs , g le facteur de gain net . Pour la diode laser $R_1 = R_2 = R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$.

L'effet laser déclenche lorsque legian compense toutes les pertes donc lorsque:

$AR^2 \exp(2\,(g-\alpha_i)\,L) \geq A \Longrightarrow 2\,(g-\alpha_i)\,L \geq \ln\dfrac{1}{R^2}$

$\Longrightarrow g \geq g_s = \alpha_i + \dfrac{1}{L}\ln\dfrac{1}{R} = \alpha_i + \dfrac{2}{L}\ln\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)$

2) La condition de resonance dans la cavité s'écrit : $2nL = m\lambda$; $m \in \mathbb{N}^*$. La différentiation de cette expression nous donne : $2Ldn = md\lambda + \lambda dm$ comme la disperssion est négligeable $dn = 0 \Longrightarrow dm = -m\dfrac{d\lambda}{\lambda} = -\dfrac{2nL}{\lambda}\dfrac{d\lambda}{\lambda}$

Le nombre des modes excités est : $M = |\Delta m| = \dfrac{2nL}{\lambda^2}\Delta\lambda$

$\Delta m = 1 \Longrightarrow \Delta\lambda = \dfrac{\lambda^2}{2nL}$,or $f = \dfrac{c}{\lambda} \Longrightarrow \Delta f = -c\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda^2} \Longrightarrow \Delta f = \dfrac{c}{2nL}$

3) En comparant les deux termes représentants l'atténuation dans la cavité

$\exp(-\dfrac{t}{\tau_p})$ et $\exp\,(-\alpha_t x)$; $\alpha_t = g_s$

on trouve $\dfrac{t}{\tau_p} = g_s x = g_s v t = g_s \dfrac{c}{n} t$

$\Longrightarrow \tau_p = \dfrac{n}{c g_s}$