Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban
le cnam

Télécommunication optique (ELE107)

Examen Prtiel 2014-2015 - Semestre II

SOLUTIONS

Exercice 1 (10 points) Répondre très brièvement aux questions suivantes :

1. Comment le modèle de Rutherford identifie la structure de l'atome.
2. Que sont les deux postulats de Bohr
3. Comment on distingue les conducteurs, semi-conducteurs et le isolants ?
4. Quelles sont les 2 aspects physiques de la lumière ?
5. Quelle est la différence entre la vibration et l'onde ?
6. Quelle est la relation entre la puissance optique et l'intensité de la lumière. ?
7. Quelle est la polarisation d'une onde électromagnétique, telle que le vecteur du champ électrique vibre en restant parallèle à lui-même ?
8. Quelle est l'équivalence mathématique des modes du guide d'onde.
9. Quelle est la polarisation d'un mode guidé dans le plan (xOz) tel que $E_x = E_z = H_y = 0$
10. L'énergie de l'état lié de l'électron dans l'atome d'hydrogène est $E_n = -\frac{13.6}{n^2}$ eV, quelle est la signification physique du nombre n

Solution 1

$\boxed{1 \times 10 \text{ points}}$

1. Rutherford identifie la structure de l'atome au système planétaire ; le noyau joue le rôle du soleil, et les électrons celui des planètes.
2. Postulats de Bohr :
   (a) Les états stationnaires les énergies du système constituent une suite discrète $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$.
   (b) Tout passage d'un état stationnaire E_m vers un autre E_n peut être accompagné d'absorption ou d'émission de rayonnement électromagnétique de fréquence ν et d'énergie $h\nu = E_m - E_n$
3. On distingue les conducteurs, semi-conducteurs et le isolants par la largeur de la bande interdite
4. les 2 aspects physiques de la lumière : sont aspect **Ondulatoire** et aspect**Corpusculaire**
5. L'onde est une vibration qui se propage dans l'espace.
6. L'intensité est l'énergie qui passe à travers une surface pendant un temps donné :

$$intensit\acute{e} = \frac{\acute{e}nergie}{surface \times intervalle\ du\ temps} = \frac{Puissance\ optique}{Surface}$$

7. Polarisation Rectiligne
8. L'équivalence mathématique d'un mode est le champ électromagnétique, *solution des équations de Maxwell*
9. Mode **TE**
10. n est le nombre quantique principal ; $n = 0, 1, 2, 3, ...$il définit la valeur propre de l'énergie de l'état lié

Exercice 2 (40 points) Un ion **hydrogénoïde** est un ion ne comportant qu'un seul électron (et Z protons), par exemple, l'ion Li^{2+}. En effet le lithium Li possède 3 protons $(Z = 3)$ et donc 3 électrons à l'état atomique ; ainsi l'ion Li^{2+} possède un seul électron.

1. Calculer l'énergie potentielle $V(r)$ de l'électron d'un ion hydrogénoïde de Z protons, qui se trouve à la distance r du noyau. sachant que $V(\infty) = 0$.
2. Le mouvement étant circulaire uniforme, calculer en fonction de Z, e, m et r l'énergie cinétique de l'électron. En déduire l'énergie totale de l'électron.
3. D'après le principe de quantification du moment cinétique de Bohr $(mvr = n\hbar)$ le rayon de l'orbite d'ordre n de l'électron pour l'ion hydrogénoïde est $r_n = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 n^2\hbar^2}{mZe^2}$, montrer que l'énergie totale est $E_n = -13.6\dfrac{Z^2}{n^2}$ eV
4. On considère une lampe à gaz d'Hélium ionisé $(He^+, Z = 2)$
   (a) Quelle est l'énergie fondamentale de He^+
   (b) Quels niveaux peuvent être excités sous la tension de 50 V
   (c) Quels sont les raies possibles que l'on peut observer ?

Solution 2

1. Dans son mouvement autour du noyau l'électron est soumis à la force d'attraction de coulombe : (due au noyau) :
$$\overrightarrow{F} = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\overrightarrow{r}$$
Son énergie potentielle est $V(r)$; $dV = -\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = -\dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$

Donc : $V(r) = \displaystyle\int \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + C$

on a $V(+\infty) = 0$ donc $C = 0$ et par suite $V(r) = -\dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ $\boxed{\text{10 points}}$

2. Le mouvement étant circulaire, la force centrifuge est $F' = \dfrac{mv^2}{r}$

à l'équilibre on a : $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{F'} \iff \dfrac{mv^2}{r} = \dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \implies mv^2 = \dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

L'énergie cinétique s'écrit : $T = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$

L'énergie totale est :
$$E = T + V = \frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r} \boxed{\text{5 points}}$$

3. Rapportons r_n dans l'expression de E :

$$E_n = -\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{mZe^2}{4\pi\varepsilon_0 n^2\hbar^2} = -\frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}\frac{Z^2}{n^2}$$

$$= -\frac{9.11\times10^{-31}\times\left(1.602\times10^{-19}\right)^4}{32\pi^2\left(8.854\times10^{-12}\right)^2\times\left(\dfrac{6.626\times10^{-34}}{2\pi}\right)^2}\frac{Z^2}{n^2} = -2.1792\times10^{-18}\frac{Z^2}{n^2}\,\mathrm{J}$$

en eV : $E_n = -\dfrac{2.1792\times10^{-18}}{1.602\times10^{-19}}\dfrac{Z^2}{n^2}$ soit

Soit

$$E_n = -13.6\frac{Z^2}{n^2}\,\mathrm{eV}\ \boxed{\text{10 points}}$$

4. $He^+, Z=2$ donc $E_n = -\dfrac{13.6\times4}{n^2} = -\dfrac{54.4}{n^2}\,\mathrm{eV}\ \boxed{\text{1 point}}$

   (a) L'énergie fondamentale de He^+ est $E_1 = -54.4\,\mathrm{eV}\ \boxed{\text{2 points}}$

   (b) L'énergie d'excitation est $E_e = 50\,\mathrm{eV}$

   Il y a excitation vers le niveau n si $E_e \geq \Delta E = E_n - E_1$ c.à.d. si $50 \geq -\dfrac{54.4}{n^2} + 54.4$

   $n^2 \leq \dfrac{54.4}{4.4} = 12.364 \Longrightarrow n \leq \left\lfloor\sqrt{12.364}\right\rfloor = 3\ \boxed{\text{2 points}}$

   Les niveaux excités sont

   - $(L) : n=2,\ E_2 = -\dfrac{54.4}{4} = -13.6\,\mathrm{eV}\ \boxed{\text{2 points}}$
   - $(M) : n=3,\ E_3 = -\dfrac{54.4}{9} = -6.04\,\mathrm{eV}\ \boxed{\text{2 points}}$

   (c) Les raies possibles que l'on peut observer sont pour les transitions : $L \to K, M \to K$ et $M \to L$ tels que : $\lambda_{\mu\mathrm{m}} = \dfrac{1.24}{\Delta E_{\mathrm{eV}}}$

   - $L \to K\,(n=2 \to n=1) : \lambda_1 = \dfrac{1.24}{54.4-13.6} = 3.0392\times10^{-2}\,\mu\mathrm{m}\ \boxed{\text{2 points}}$
   - $M \to K\,(n=3 \to n=1) : \lambda_2 = \dfrac{1.24}{54.4-6.04} = 2.5641\times10^{-2}\,\mu\mathrm{m}\ \boxed{\text{2 points}}$
   - $M \to L\,(n=3 \to n=2) : \lambda_3 = \dfrac{1.24}{13.6-6.04} = 0.16402\,\mu\mathrm{m}\ \boxed{\text{2 points}}$

Exercice 3 (50 points) On considère un guide d'onde planaire symétrique d'épaisseur $h = 5\,\mu$m, d'indice de couche coeur $n = 1.45$, plongée dans un milieu d'indice $n_1 = 1.4$. Les modes TE_m, excités par lumière laser de longueur d'onde $\lambda = 0.6\,\mu$m se propagent dans le guide avec des constantes de propagation longitudinales β_m pour les angles θ_m : $\beta_m = \dfrac{2\pi}{\lambda} n \sin\theta_m$.
Une section planne est dans le plan (xoz) et $\overrightarrow{\beta}\,//Oz$.

1. En tenant compte de la condition de propagation ($\beta_m \geq kn_1$) montrer que le nombre maximal des modes guidés est $M = \dfrac{2h}{\lambda}\sqrt{n^2-1}$, calculer la valeur numérique de M.
2. Calculer β_1 et θ_1.
3. Calculer l'épaisseur effective pour le mode TE_1
4. Quelle longueur d'onde faut-il utiliser pour que le guide soit monomode, calculer dans ce cas β_1 et θ_1

5. On suppose que l'angle d'incidence d'un mode TE sur l'interface $n - n_1$ est θ et l'angle de transmission dans le milieu n_1 est θ_1, Le champ incident est de la forme :

$$E_i = E_0 \exp j \left(\omega t - n \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r}\right)$$

avec $\overrightarrow{k}$ est le vecteur d'onde et $\overrightarrow{r}$ est le rayon vecteur

(a) Donner une expression du champ électrique de l'onde transmise (E_t)

(b) que se passe-t-il si $\theta > \theta_\ell = \arcsin \dfrac{n_1}{n}$

(c) Calculer la déphsage entre les ondes incidente et réflechie.

Solution 3

1. La condition de quantification de la constante de propagation qui démontre que $\beta_m = kn \sin \theta_m = \sqrt{k^2 n^2 - (m+1)^2 \dfrac{\pi^2}{h^2}}$
Les modes sont guidés si $\beta_m \geq kn_1$, c.à.d. si
$k^2n^2 - (m+1)^2 \dfrac{\pi^2}{h^2} \geq k^2 n_1^2 \Longrightarrow k^2n^2 - k^2n_1^2 \geq (m+1)^2 \dfrac{\pi^2}{h^2}$
$\Longrightarrow (m+1) \dfrac{\pi}{h} \leq k\sqrt{n^2 - n_1^2} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\sqrt{n^2 - n_1^2}$ donc $(m+1) \leq \dfrac{2h}{\lambda}\sqrt{n^2 - n_1^2}$ soit

$$M = \frac{2h}{\lambda}\sqrt{n^2 - n_1^2} \quad \boxed{\text{8 points}}$$

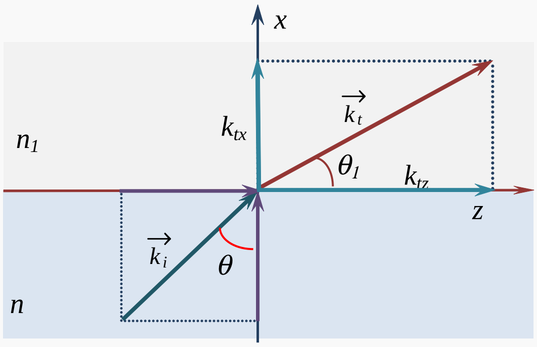
$M = \dfrac{2 \times 5}{0.6}\sqrt{(1.45)^2 - (1.4)^2} = 6$ modes $\boxed{\text{2 points}}$

2. $\beta_m = \sqrt{k^2n^2 - (m+1)^2 \dfrac{\pi^2}{h^2}}$
$\beta_1 = \sqrt{\dfrac{4\pi^2}{\lambda^2} n^2 - (1+1)^2 \dfrac{\pi^2}{h^2}} = 2\pi \sqrt{\dfrac{n^2}{\lambda^2} - \dfrac{1}{h^2}} = 2\pi \sqrt{\left(\dfrac{1.45}{0.6}\right)^2 - \dfrac{1}{25}} = 15.132\,\mu\text{m}^{-1}$
$\boxed{\text{3 points}}$
$\sin\theta_1 = \dfrac{\beta_1}{kn} = \dfrac{\lambda\beta_1}{2\pi n} = \dfrac{0.6 \times 15.132}{2\pi \times 1.45} = 0.99656$
$\theta_1 = \arcsin(0.99656) = 1.4878\,\text{rad} = 85.245\,^\circ$ $\boxed{\text{2 points}}$

3. La profendeur de pénétration de Goos-Heanchen est :
$x_1 = \dfrac{1}{\gamma} = \dfrac{1}{\sqrt{\beta_1^2 - k^2 n_1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{(15.132)^2 - \left(\dfrac{2\pi \times 1.4}{0.6}\right)^2}} = 0.26689\,\mu\text{m}$ $\boxed{\text{3 points}}$
l'épaisseur effective est $h^* = h + 2x_1 = 5 + 2 \times 0.26689 = 5.5338\,\mu\text{m}$ $\boxed{\text{3 points}}$

4. Monomode si $M = 1 \Longrightarrow \dfrac{2h}{\lambda}\sqrt{n^2 - n_1^2} = 1$
$\Longrightarrow \lambda = 2h\sqrt{n^2 - n_1^2} = 2 \times 5 \times \sqrt{(1.45)^2 - (1.4)^2} = 3.7749\,\mu\text{m}$ $\boxed{\text{3 points}}$
$\beta_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{n^2}{\lambda^2} - \dfrac{1}{h^2}} = 2\pi\sqrt{\left(\dfrac{1.45}{3.7749}\right)^2 - \dfrac{1}{25}} = 2.0605$ $\boxed{\text{3 points}}$
$\sin\theta_1 = \dfrac{\beta_1}{kn} = \dfrac{\lambda\beta_1}{2\pi n} = \dfrac{0.6 \times 2.0605}{2\pi \times 1.45} = 0.13570$
$\theta_1 = \arcsin(0.13570) = 0.13612\,\text{rad} = 7.7991\,^\circ$ $\boxed{\text{3 points}}$

5. Le plan de propagation est le plan (xoy), le vecteur d'onde est $\overrightarrow{k} = -k\cos\theta\,\overrightarrow{i} + k\sin\theta\,\overrightarrow{j}$ donc $\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} = -kx\cos\theta + ky\sin\theta$



(a) l'onde incidente s'exprime : $E_i = E_0 \exp\left[j\left(\omega t + knx\cos\theta - knz\sin\theta\right)\right]$ et l'onde transmise est : $E_t = E_0' \exp\left[j\left(\omega t + kn_1 x\cos\theta_1 kn_1 - z\sin\theta_1\right)\right]$ $\boxed{5 \text{ points}}$

(b) Si $\theta > \theta_\ell = \arcsin\left(\frac{n_1}{n}\right)$ la lumière subit une réflexion totale et par suite $\cos\theta_1$est imaginaire :

$$\cos\theta_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{n\sin\theta}{n_1}\right)^2} = j\sqrt{\left(\frac{n\sin\theta}{n_1}\right)^2 - 1} = jB \boxed{5 \text{ points}}$$

L'onde transmise est donc :

$$E_t = E_0' \exp\left[j\left(\omega t - kn_1 z\sin\theta_1 + jk\sqrt{n^2\sin^2\theta - n_1^2}\right)\right]$$
$$= E_0' \exp\left(-k\sqrt{n^2\sin^2\theta - n_1^2 x}\right) \exp\left[j\left(\omega t - knz\sin\theta\right)\right]$$
$$= E_0' \exp\left(-\gamma x\right) \exp\left[j\left(\omega t - \beta z\right)\right] \boxed{5 \text{ points}}$$

(c) Le coefficient de réflexion s'écrit :

$$r_\perp = \frac{n\cos\theta - j\sqrt{n^2\sin^2\theta - n_1^2}}{n\cos\theta + j\sqrt{n^2\sin^2\theta - n_1^2}} = \frac{A + jB}{A - jB} = e^{-2j\delta}$$ où δ est la déphsage entre les ondes incidente et réflechie

$$\delta = \arctan\left(\frac{B}{A}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{n^2\sin^2\theta - n_1^2}}{n\cos\theta}\right) \boxed{5 \text{ points}}$$