

Télécommunication optique (ELE107)

Examen Final 2006-2007

Lundi le 16 juillet 2007

Solutions

Exercice 1 On considère la réflexion d'une onde plane provenant d'un milieu d'indice de réfraction $n_1 = 1,5$ sur un milieu d'indice $n_2 = 1$, les deux milieux étant séparés par un dioptre plan.

1. Calculer l'angle critique de réflexion totale.
2. On désigne par θ_1 l'angle d'incidence et par θ_2 l'angle de réfraction. Pour $\theta_1 = 60^\circ$ calculer les déphasages à la réflexion φ_{\perp} et $\varphi_{//}$ pour les deux états de polarisations.
3. De combien les champs sont-ils atténués dans le milieu n_2 à la distance $z = \lambda_0$ de l'interface ($\theta_1 = 60^\circ$), λ_0 est la longueur d'onde dans le vide

on donne: $r_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}$ $r_{//} = \frac{n_1 \cos \theta_2 - n_2 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_2 + n_2 \cos \theta_1}$

Solution 1 $n_1 = 1,5$ $n_2 = 1$

1. $\sin \theta_{\ell} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{1,5} = 0,667 \implies$

2. $\theta_1 = 60^\circ > \theta_{\ell}$ donc la lumière subit une réflexion totale et l'angle θ_2 est imaginaire on a $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$

$$\cos \theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{2} \sin(60^\circ)\right)^2} = 0,829j = jB$$

$$\theta_1 = 60^\circ \implies \cos \theta_1 = \cos(60^\circ) = \cos(60^\circ) = 0,5$$

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} = \exp(2j\delta) = \exp(j\varphi_{\perp})$$

$$= \frac{1,5 \times 0,5 - 0,829j}{1,5 \times 0,5 + 0,829j} = \frac{0,75 - 0,829j}{0,75 + 0,829j}$$

$$\tan \delta = \frac{0,829}{0,75} = 1,11 \implies \delta = \arctan(1,11) = 0,837 \text{ rad} = 48^\circ$$

$$\varphi_{\perp} = 2\delta = 2 \times 48 = 96^\circ$$

$$r_{//} = \frac{n_1 \cos \theta_2 - n_2 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_2 + n_2 \cos \theta_1} = \frac{1.5 \times 0.829 j - 0.5}{1.5 \times 0.829 j + 0.5} = \frac{-0.5 + 1.24j}{0.5 + 1.24j}$$

$$\tan \delta = \frac{1.24}{0.5} = 2.48 \implies \delta = \arctan(2.48) = 1.19 \text{ rad} = 68.2^\circ$$

$$\varphi_{//} = 2\delta = 2 \times 68.2^\circ = 136.0^\circ$$

3. $E(z) = E_0 \exp(-kn_2 Bz)$ avec $B = 0.829$ et $k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$

avec $n_2 = 1$ et $z = \lambda_0$ on trouve:

$$\frac{E(z)}{E_0} = \exp(-2\pi B) = \exp(-2\pi \times 0.829) = e^{-1.66\pi} = 0.00543$$

Exercice 2 Une fibre optique à saut d'indice possède les caractéristiques suivantes : différence relative des indices $\Delta = 0,005$; indice de réfraction du coeur $n_1 = 1,45$. La fibre étant supposée multimode.

1. Donner la définition et établir l'expression de l'ouverture numérique (ON) de la fibre en fonction de Δ . Calculer ON
2. On demande de calculer l'ordre de grandeur du débit maximum B_{\max} d'une liaison numérique au format NRZ de longueur $L = 1\text{km}$ (on admet que le débit est $B < \frac{1}{\Delta\tau}$) et on néglige les dispersionS chromatique et du guide.
3. Calculer la valeur de l'élargissement temporel du signal à cause de la dispersion chromatique sachant que $\frac{d^2n}{d\lambda^2} = 3 \times 10^{10} \text{ m}^{-2}$, et que devient B_{\max} dans les deux cas:
 - (a) La source est une diode laser : $\lambda = 0.850 \mu\text{m}$ et $\Delta\lambda = 0,5 \text{ nm}$
 - (b) La source est une diode électroluminescente : $\lambda = 0.850 \mu\text{m}$ et $\Delta\lambda = 50 \text{ nm}$
4. Calculer le diamètre maximum de coeur de la fibre monomode possédant les mêmes paramètres que la fibre précédente à la longueur d'onde $\lambda = 0.850 \mu\text{m}$ On admet que la fibre devient monomode si $V < 2,405$.
5. La fibre est fabriquée en silice, le seuil de puissance de rupture est de 1 GW/cm^2 . Une impulsion d'énergie 40 mJ et de durée 10 ns est injectée dans la fibre. Calculer la valeur minimale du rayon pour laquelle la fibre fonctionne sans rupture.

Solution 2 $\Delta = 0,005$, $n_1 = 1,45$. La fibre étant supposée multimode

1. L'ouverture numérique est le sinus de l'angle au sommet du cône de révolution dans laquelle on peut injecter la lumière dans la fibre et elle se propage par réflexion totale donc du côté de l'air $ON = \sin \alpha_c = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} = \frac{(ON)^2}{2n_1^2} \implies ON = n_1 \sqrt{2\Delta}$$

$$ON = 1.45 \times \sqrt{2 \times 0.005} = 0.145$$

2. La dispersion est intermodale $\Delta\tau = \Delta\tau_n = \frac{L}{2cn_1} (ON)^2$

$$\text{on a } \Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} = \frac{(ON)^2}{2n_1^2} \implies \frac{(ON)^2}{2n_1} = n_1\Delta$$

$$\implies \Delta\tau = \frac{Ln_1\Delta}{c} = \frac{1 \times 10^3 \times 1.45 \times 0.005}{3 \times 10^8} = 2.42 \times 10^{-8} \text{ s} = 24,2 \text{ ns}$$

$$B < \frac{1}{\Delta\tau} = \frac{1}{2.42 \times 10^{-8}} = 4.13 \times 10^7$$

$$B_{\max} = 4.13 \times 10^7 = 41.3 \text{ Mbit/s}$$

3. $\Delta\tau_m = -\frac{\lambda}{c} L \left(\frac{d^2n}{d\lambda^2} \right) \Delta\lambda$, $L = 1 \text{ km}$ et $\frac{d^2n}{d\lambda^2} = 3 \times 10^{10} \text{ m}^{-2}$

(a) $\lambda = 0.850 \mu\text{m}$ et $\Delta\lambda = 0,5 \text{ nm}$

$$\Delta\tau_m = \frac{0.850 \times 10^{-6} \times 1 \times 10^3 \times 3 \times 10^{10} \times 0.5 \times 10^{-9}}{3 \times 10^8} = 4.25 \times 10^{-11} \text{ s} = 42.5 \text{ ps}$$

$$B_{\max} = \frac{1}{4.25 \times 10^{-11}} = 2,35 \times 10^{10} = 23,5 \text{ Gbit/s}$$

(b) $\lambda = 0.850 \mu\text{m}$ et $\Delta\lambda = 50 \text{ nm}$

La largeur spectral dans ce cas est 100 fois plus grand donc B_{\max} est 100 fois plus faible

$$B_{\max} = 2,35 \times 10^8 \text{ bit/s} = 23,5 \text{ Mbit/s}$$

4. $V = kaON \implies a = \frac{V}{kON} = \frac{V\lambda}{2\pi ON}$

La fibre est monomode si $V < 2.405$ c.à.d. si:

$$a < a_{\max} = \frac{2.405\lambda}{2\pi ON} = \frac{2.405 \times 0.85}{2\pi \times 0.145} = \frac{7.05}{\pi} = 2.24 \mu\text{m}$$

5. La puissance de rupture $P_r = 1 \text{ GW/cm}^2$

$$\text{La puissance injectée est } P_i = \frac{E}{\Delta t} = \frac{40 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-9}} = 4000000 = 4 \text{ MW}$$

Surface de fibre $s = \pi a^2$

$$\text{il faut que } \frac{P_i}{\pi a^2} \leq P_r \implies a^2 \geq \frac{P_i}{\pi P_r} = \frac{4 \times 10^6}{\pi \times 1 \times 10^9} = \frac{1}{250\pi} = 1.2732 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$a_{\max} = \sqrt{1.2732 \times 10^{-3}} = 3.5682 \times 10^{-2}$$

Il faut que a soit plus grand que 3.568 cm

Exercice 3 Lors de propagation de la lumière la fibre optique s'échauffe à cause de l'absorption et l'énergie optique se transforme en énergie thermique: $E_T = E_i - E_s = mc_0\Delta T$. On désire de transmettre une impulsion de puissance $P_i = 80 \text{ W}$ et de durée 0.7 s et de longueur d'onde $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$. On propose deux types de fibres:

- a** Fibre en Quartz: Atténuation $\alpha_{dB/km} = 5 \text{ dB/km}$; rayon du coeur $a = 300 \text{ }\mu\text{m}$, Chaleur massique: $c_0 = 750 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$; masse volumique $\rho = 2,2 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ Température de dommage $T_D = 1200 \text{ }^\circ\text{C}$.
- b** Fibre en acrylique: $\alpha_{dB/km} = 400 \text{ dB/km}$; $a = 500 \text{ }\mu\text{m}$, $c_0 = 1.4 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$; $\rho = 1.2 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ $T_D = 200 \text{ }^\circ\text{C}$.

Evaluer l'élévation de température à l'intérieur de la fibre due à l'impulsion lumineuse sur 1 mètre de longueur en négligeant les échanges thermiques avec l'extérieur. Quelle est la fibre le mieux adaptée à l'application.

Solution 3 Soit E_i l'énergie injectée et E_s l'énergie après 1 mètre donc l'énergie absorbée et transformée en énergie thermique est $E_T = E_i - E_s = mc_0\Delta T$

$$\text{L'atténuation sur 1 mètre est } \alpha' = \frac{\alpha_{dB/km}}{1000} = 10 \log(E_s/E_i) \implies E_s = E_i 10^{-\alpha' \times 10^{-4}}$$

$$E_i = P \times \Delta t = 80 \times 0.7 = 56 \text{ J}$$

$$E_s = 56 \times 10^{-\alpha' \times 10^{-4}}$$

a Pour la fibre en quartz:

$$\alpha = 5 \text{ dB/km} \implies E_s = 56 \times 10^{-5 \times 10^{-4}} = 55.936 \text{ J}$$

$$E_T = 56 - 55.936 = 0.064 \text{ J}$$

La masse de 1 mètre est

$$m = s \times L \times d_e \times 10^3 = \pi \times (300 \times 10^{-6})^2 \times 2.2 \times 10^3 = 6.2204 \times 10^{-4} \text{ kg}$$

$$E_T = mc_0\Delta T \implies \Delta T = \frac{E_T}{mc_0} = \frac{0.064}{6.2204 \times 10^{-4} \times 750} = 0.13718 \text{ }^\circ\text{C}$$

b Pour la fibre en acrylique:

$$\alpha_{dB/km} = 400 \text{ dB/km} \implies E_s = 56 \times 10^{-400 \times 10^{-4}} = 51.073$$

$$E_T = 56 - 51.073 = 4.927$$

$$m = \pi (500 \times 10^{-6})^2 1.2 \times 10^3 = 9.4248 \times 10^{-4} \text{ kg}$$

$$\Delta T = \frac{4.927}{9.4248 \times 10^{-4} \times 1400} = 3.7341 \text{ }^\circ\text{C}$$

On remarque que la fibre en Quartz est plus adaptée car l'échauffement est moins et la température de dommage est plus grand que celle en acrylique.

Exercice 4 On considère une diode laser dont la couche active est à la base de GaAs ($\varepsilon = 13.2$); les pertes intrinsèques sont équivalentes à $\alpha_i = 330 \text{ m}^{-1}$, les dimensions de la cavité : longueur $L = 500 \text{ }\mu\text{m}$, largeur $w = 1.3 \text{ }\mu\text{m}$ et épaisseur $d = 0.2 \text{ }\mu\text{m}$, largeur de la bande interdite $E_g = 1.3 \text{ eV}$, largeur spectrale $\Delta\lambda = 0.01 \text{ }\mu\text{m}$.

1. Démontrer que l'effet laser déclenche à partir d'une valeur de seuil du gain g_s . Déterminer l'expression de g_s et calculer sa valeur numérique.

2. L'onde propageant dans la cavité suivant la direction Oz est de la forme

$$E = E_0 \exp(j(\omega t - \beta z))$$

avec $\beta = \frac{2\pi n}{\lambda} + j\frac{g - \alpha}{2}$, λ est la longueur d'onde émise, n est l'indice de réfraction de la cavité, g le facteur du gain net et α le facteur de perte.

(a) Etablir la condition de résonance de modes, calculer, M , le nombre maximale des modes longitudinaux excités et en déduire la largeur spectral $\Delta\lambda_0$, et l'intervalle en fréquence Δf entre les modes voisins.

(b) Calculer, en fonction de E_0 l'amplitude de l'onde qui a traversée 2 m dans la cavité avec facteur de gain net de 3100 m^{-1}

3. En tenant compte de la perte due à la réflexion sur les miroirs de la cavité Calculer en fonction de n, L , et α_i la durée de vie du photon (τ_p) à l'intérieur de la cavité.

4. Sachant que l'intensité du courant de seuil est $I_s = 40 \text{ mA}$ et l'efficacité interne est de 75%, calculer la puissance optique sortant d'une face en appliquant un courant d'intensité $I = 60 \text{ mA}$

5. Tracer la caractéristique flux courant de diode dans l'intervalle $0 \leq I \leq 100 \text{ mA}$

6. Calculer le temps de réponse t_d de diode avec le courant $I = 60 \text{ mA}$. Représenter graphiquement la variation $t_d(I)$. Durée de vie de l'électron: $\tau_e = 3 \text{ ns}$

On donne :

Charge de l'électron: $e = 1.6021 \times 10^{-19} \text{ C}$,

Constante de Planck: $h = 6.6260755 \times 10^{-34} \text{ Js} = 4.1356692 \times 10^{-15} \text{ eVs}$

Solution 4 ($\varepsilon = 13.2$), $\alpha_i = 3,3 \text{ cm}^{-1}$, $L = 500 \text{ }\mu\text{m}$, largeur $w = 1.3 \text{ }\mu\text{m}$ et épaisseur $d = 0.2 \text{ }\mu\text{m}$, $E_g = 1.3 \text{ eV}$, $\Delta\lambda = 0.01 \text{ }\mu\text{m}$

1. Soit un point M , de la cavité où née une onde d'amplitude A . En traversant une fois la cavité (aller-retour) et après deux réflexions sur les miroirs l'amplitude en M sera $AR_1R_2 \exp(-2\alpha_i L) \exp(2gL)$. où L la longueur de la cavité et R_1, R_2 les réflectivités des miroirs, g le facteur de gain net. Pour la diode laser $R_1 = R_2 = R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$.

L'effet laser déclenche lorsque le gain compense toutes les pertes donc lorsque:

$$AR^2 \exp(2(g - \alpha_i)L) \geq A \implies 2(g - \alpha_i)L \geq \ln \frac{1}{R^2}$$

$$\implies g \geq g_s = \alpha_i + \frac{1}{L} \ln \frac{1}{R} = \alpha_i + \frac{2}{L} \ln \left(\frac{n+1}{n-1}\right)$$

$$\varepsilon = 13.2 \text{ donc } n = \sqrt{13.2} = 3.6332,$$

$$g_s = 330 + \frac{2}{500 \times 10^{-6}} \times \ln \left(\frac{3.6332 + 1}{3.6332 - 1}\right) = 2590.2$$

$$2. E = E_0 \exp(j(\omega t - \beta z)) \text{ avec } \beta = \frac{2\pi n}{\lambda} + j\frac{g - \alpha}{2},$$

$$\implies E = E_0 \exp(j\omega t) \exp\left(j\frac{2\pi n z}{\lambda}\right) \exp\left(\frac{g - \alpha}{2} z\right).$$

a) pour avoir une onde stationnaire resonnante il faut avoir conserver la phase en chaque point après deux réflexion sur les miroirs pour une aller-retour $z = 2L$

$$\implies \frac{2\pi n(2L)}{\lambda} = 2m\pi \iff 2nL = m\lambda$$

$\Delta(2nL) = \Delta(m\lambda)$ si le milieu est non dispersif on obtient :

$$m\Delta\lambda = \lambda\Delta m \implies \Delta m = M = \frac{m\Delta\lambda}{\lambda} = 2nL \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$$

$$\lambda = \frac{1.24}{E_g} = \frac{1.24}{1.3} = 0.953$$

$$M = 2 \times 3.6332 \times 500 \frac{(0.01)}{(0.953)^2} = 40 \text{ modes}$$

La largeur spectrale de modes succesives($\Delta m = 1$) est

$$\Delta\lambda_0 = \frac{\lambda^2}{2nL} = \frac{(0.953)^2}{2 \times 3.6332 \times 500} = 2.4997 \times 10^{-4} \mu\text{m}$$

$$\Delta f = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = 3 \times 10^8 \times \frac{2.4997 \times 10^{-4} \times 10^{-6}}{(0.953 \times 10^{-6})^2} = 8.257 \times 10^{10} \text{ Hz}$$

$$b) E = E_0 \exp(j\omega t) \exp\left(j\frac{2\pi n z}{\lambda}\right) \exp\left(\frac{g - \alpha}{2} z\right)$$

$$\implies E_1 = E_0 \exp\left(\frac{g - \alpha}{2} z\right) = E_0 \exp\left(\frac{g - g_s}{2} z\right)$$

$$= E_0 \exp\left(\frac{3100 - 2590.2}{2} \times 0.02\right) = 163.69 E_0$$

3. En comparant les deux termes représentant l'atténuation dans la cavité

$$\exp\left(-\frac{t}{\tau_p}\right) \text{ et } \exp(-\alpha_t x); \alpha_t = g_s$$

$$\text{on trouve } \frac{t}{\tau_p} = g_s x = g_s v t = g_s \frac{c}{n} t$$

$$\implies \tau_p = \frac{n}{c g_s} = \frac{3.6332}{3 \times 10^8 \times 2590.2} = 4.6756 \times 10^{-12} \text{ s} = 4.6756 \text{ ps}$$

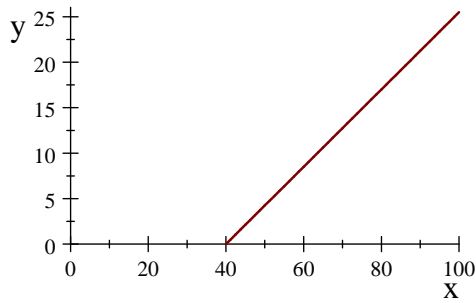
$$4. \text{ La puissance interne est } P_i = \eta_i \frac{\hbar\omega}{e} (I - I_s) = \eta_i \frac{hc}{e\lambda} (I - I_s)$$

$$= \eta_i E_g (I - I_s) = 0.75 \times 1.3 \times (60 - 40)$$

$$= 19.5 \text{ mW}$$

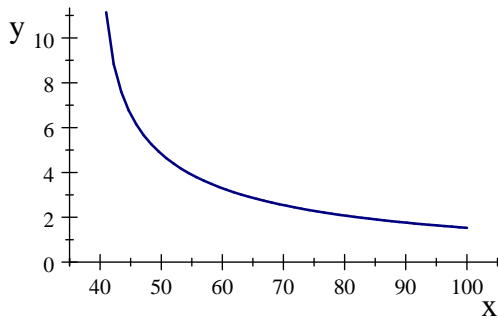
$$P_e = \frac{P_i}{2} \frac{\alpha_m}{\alpha_i + \alpha_m} = \frac{19.5}{2} \times \frac{2260.2}{2590.2} = 8.5078 \text{ mW}$$

$$5. P_e = \frac{P_i}{2} \frac{\alpha_m}{\alpha_i + \alpha_m} = \frac{\eta_i E_g}{2} \frac{\alpha_m}{\alpha_i + \alpha_m} (I - I_s) = 0.42539I - 17.016$$



la puissance laser est nul si $I \leq I_s$

$$6. t_d = \tau_e \ln \left(\frac{I}{I - I_s} \right) = 3 \ln \left(\frac{60}{60 - 40} \right) = 3 \ln 3 = 3.2958 \text{ ns}$$



$$t_d(I) = 3 \ln \left(\frac{I}{I - 40} \right)$$

Exercice 5 On fabrique une photodiode à GaAs d'énergie de gap $E_g = 1.43 \text{ eV}$ à 300 K, d'indice de réfraction $n = 3.5$. Le coefficient d'absorption à la longueur d'onde $\lambda = 0.85 \mu\text{m}$ est $\alpha_s = 10^5 \text{ m}^{-1}$, la largeur de la zone désertée est $w_d = 10 \mu\text{m}$, la photodiode reçoit des photons du côté de la zone P de largeur: $w_p = 10 \mu\text{m}$

1. Quelle est la longueur d'onde de seuil de cette photodiode.
2. Etablir l'expression de l'efficacité quantique en fonction de α_s, w_d, w_p et n . Calculer sa valeur numérique.
3. Définir la sensibilité spectrale de photodiode, calculer sa valeur numérique et en déduire l'intensité du photocourant généré en absorbant la puissance optique de 3mW.

Solution 5 $E_g = 1.43 \text{ eV}$

1. La photodiode de largeur de bande interdite E_g est sensible aux photons d'énergie $\hbar\omega \geq E_g$ ou

$$\frac{hc}{\lambda} \geq E_g \implies \lambda \leq \frac{hc}{E_g} = \frac{1.24}{E_g} E_g \text{ en eV et } \lambda \text{ en } \mu\text{m} .$$

$$\lambda_s = \frac{1.24}{E_g} = \frac{1.24}{1.43} = 0.86713 \mu\text{m}$$

2. On désigne par P_0 la puissance incidente sur la zone P une partie de cette puissance subit une réflexion partielle sur le dioptre air-semiconducteur de réflectivité

$$R = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 = \left(\frac{3.5-1}{3.5+1} \right)^2 = 0.30864 .$$

La puissance émergente dans la région P est $(1-R)P_0$, en traversant la distance w_p la puissance devient $(1-R)P_0 \exp(-\alpha_s w_p)$, et entraversant la zone désertée la puissance devient :

$$(1-R)P_0 \exp(-\alpha_s w_p) \exp(-\alpha_s w_d)$$

donc la puissance absorbée dans la zone désertée et qui se transforme en courant est donc:

$$P_u = (1-R)P_0 \exp(-\alpha_s w_p) [1 - \exp(-\alpha_s w_d)]$$

d'où l'efficacité quantique

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{P_u}{P_0} = (1-R) \exp(-\alpha_s w_p) [1 - \exp(-\alpha_s w_d)] \\ &= (1-0.30864) \times \exp(-10^5 \times 10 \times 10^{-6}) \times [1 - \exp(-10^5 \times 10 \times 10^{-6})] \\ &= 0.69136e^{-1} [1 - e^{-1}] = 0.161 \end{aligned}$$

3. La sensibilité spectrale d'une photodiode représente le photocourant généré I_p par unité de puissance incidente P_i : $S_\lambda = \frac{I_p}{P_i} = \eta \frac{\lambda}{1.24} = 0.161 \frac{0.85}{1.24} = 0.11036 \text{ A/W}$

$$I_p = S_\lambda P_i = 0.11036 \times 3 = 0.33108 \text{ mA}$$