Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Centre du Liban Associé au
Conservatoire Nationale des Arts et Métiers – Paris

Télécommunication optique (ELE107)
Examen Final 2007-2008 sem.2

Documents autorisés: Slides PowerPoint **Durée** : 3 h

Exercise 1 *On considère un guide d'onde plan symétrique, d'indice* $n = 1.5$*, d'épaisseur* $h = 20\mu m$ *plongé dans un milieu d'indice* $n_1 = 1.4$ *dans lequel on faitexciter des modes* TE_m *avec la longueur d'onde* $\lambda = 1.3\ \mu m$

1. Démontrer que la constante de propagation β_m de modes TE_m est une grandeur quantifié. Donner l'expression de β_m en fonction de λ, h, m, n .Calculer $\beta_0, \beta_1, \beta_2$
2. Déduire $\cos\theta_m$, où θ_m est l'angle de propagation du mode TE_m
3. Déduire une expression pratique permettant de calculer le nombre des modes guidés en fonction de h et λ.Que doit être l'épaisseur de la couche coeur pour avoir un mode unique avec $\lambda = 1.3\mu m$.
4. En tenant compte des réflexions sur les interfaces $n_1 \div n$ Etudier les structures des champs des modes TE_m et donner en particulier l'allure des modes TE_0, TE_1 et TE_2.

Solution 2 *:*

1. On suppose que l'onde se propage le long du guide suivant l'axe oz et que $x = 0$ sur l'interface $n - n_1$et $x = -h$ sur l'interface $n - n_2$. L'onde A subit deux réflexions en $x = 0$et $x = -h$ pour arriver en $A\prime$. Chaque fois la réflexion interne totale introduit un déphasage de $-\pi$; de plus la différence de marche optique entre les deux ondes A et A' est $2hn\cos\theta$ ce qui entraîne une différence de phase de $2khn\cos\theta$ .Une condition nécessaire de guidage c'est que les ondes A et $A\prime$ soient en phase donc :

$$2khn\cos\theta - 2\pi = 2m\pi \qquad m = 0, 1, 2, 3, \tag{1}$$

ou bien :

$$qh = (m+1)\pi \tag{2}$$

où $q = kn\cos\theta$ représente le nombre d'onde transverse. Avec $\beta = kn\sin\theta$ on remarque que kn, q et β sont lier géométriquement par la relation : $q^2 + \beta^2 = k^2n^2$

En substituant dans (2) on trouve:

$$\beta = \sqrt{k^2n^2 - (m+1)^2\frac{\pi^2}{h^2}} \tag{3}$$

C'est la condition de quantification de la constante de propagation qui démontre que la constante de propagation ne peut prendre que des valeurs discrètes : $\beta_m = \pi\sqrt{\frac{4n^2}{\lambda^2} - \frac{(m+1)^2}{h^2}}$ et il y en a un nombre limité des modes guidés.

$\beta_m = \pi\sqrt{\frac{4n^2}{\lambda^2} - \frac{(m+1)^2}{h^2}} = \pi\sqrt{\frac{4\times1.5}{1.3} - \frac{(m+1)^2}{(20)^2}} = \pi\sqrt{\left(4.6154 - \frac{1}{400}(m+1)^2\right)}$

$\beta_0 = \pi\sqrt{\left(4.6154 - \frac{1}{400}(1)^2\right)} = 2.1478\pi = 6.7475\mu m^{-1}$

$\Longrightarrow \sin\theta_0 = \frac{\beta_0\lambda}{2\pi n} = \frac{6.7475\times1.3}{2\pi\times1.5} = 0.93071\,\text{rad} = 53.326\,^\circ$

$\beta_1 = \pi\sqrt{\left(4.6154 - \frac{4}{400}\right)} = 6.7419\mu m^{-1}$

$\sin\theta 1 = \frac{\beta_1\lambda}{2\pi n} = \frac{6.7419\times1.3}{2\pi\times1.5} = \quad 0.92994\,\text{rad} = 53.282\,^\circ$

$\beta_2 = \pi\sqrt{\left(4.6154 - \frac{1}{400}(2+1)^2\right)} = 6.7328\mu m^{-1}$

2. Avec $q = kn\cos\theta$ on déduit directement :

$$\cos\theta_m = \frac{(m+1)\pi}{knh} \tag{4}$$

$\cos(\theta_m) = \frac{(m+1)\pi}{knh} = \frac{(m+1)\lambda}{2nh} = \frac{(m+1)\times1.3}{2\times1.5\times20} = 2.1667\times10^{-2}(m+1)$

3. La condition de réflexion interne totale: $\sin\theta_m \geq \frac{n_1}{n} \Longrightarrow \cos\theta_m = \frac{(m+1)\pi}{knh} \leq \sqrt{1-\frac{n_1^2}{n^2}}$

$\Longrightarrow (m+1) \leq \frac{knh}{\pi}\sqrt{1-\frac{n_1^2}{n^2}} = \frac{2h}{\lambda}\sqrt{n^2-n_1^2}$

$$M = \frac{2h}{\lambda}\sqrt{n^2-n_1^2}$$

$M = \frac{2h}{\lambda}\sqrt{n^2-n_1^2} = \frac{2h}{\lambda}\sqrt{(1.5)^2-(1.4)^2} = 1.077\frac{h}{\lambda}$

Guide monomode : $M = 1 \Longrightarrow h = \frac{\lambda}{1.077} = \frac{1.3}{1.077} = 1.2071\ \mu m$

4. Cours étude des structures.

Exercise 3 *On considère une diode laser dont les caractéristiques sont : Pertes intrinsèques α_i , indice de réfraction n , dimensions : $L\times w\times d$, largeur de la bande interdite E_g.*

1. Démontrer que l'effet laser déclenche à partir d'une valeur de seuil du gain g_s qu'on déterminera l'expression en fonction de α_i, n et L

2. En négligeant la dispersion dans la couche active, déterminer le nombre des modes excités (M) dans telle diode, En déduire l'intervalle de fréquence (Δf) entre deux modes successifs .

3. En tenant compte de la perte due à la réflexion sur les miroirs de la cavité. Calculer en fonction de $n, L,$ et α_i la durée de vie du photon(τ_p) à l'intérieur de la cavité.

4. Calculer les valeurs numériques de : g_s, M, Δf, et τ_p .

5. La diode émet de la puissance optique $1.17mW$ en appliquant un courant d'intensité: I , telle puissance devient $1.95mW$ si on augment l'intensité du courant de $0.8mA$. Calculer l'intensité du courant de seuil et la valeur de l'efficacité quantique.

6. Etablir l'expression du temps de réponse de diode en fonction de l'intensité du courant I,du courant de seuil I_s et la durée de vie de l'électron τ_e.Calculer sa valeur numérique. Quel courant de prépolarisation faut-il appliquer pour réduire le temps de réponse au moitié

Application numériques:
Longueur de la cavité: $L = 500\mu$m, largeur $w = 1.3\mu m$, épaisseur : $d = 0.1\mu m$;
$\alpha_i = 600\text{m}^{-1}$, $n = 3.6$, $E_g = 1.3$ eV , $I = 3m$A, Durée de vie de l'électron: $\tau_e = 3$ ns . largeur spectrale $\Delta\lambda = 0.1\mu m$

Solution 4 *:*

1. Soit un point M, de la cavité où née une onde d'amplitude A. En traversant une fois la cavité (aller-retour) et après deux réflexions sur les miroirs l'ampliutde en M sera $AR_1R_2\exp(-2\alpha_iL)\exp(2gL)$. où L la longueur de la cavité et R_1, R_2 les réflectivités des miroirs , g le facteur de gain net . Pour la diode laser $R_1 = R_2 = R = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^2$.

   L'effet laser déclenche lorsque legian compense toutes les pertes donc lorsque:

   $AR^2\exp(2(g-\alpha_i)L) \geq A \Longrightarrow 2(g-\alpha_i)L \geq \ln\dfrac{1}{R^2}$

   $\Longrightarrow g \geq g_s = \alpha_i + \dfrac{1}{L}\ln\dfrac{1}{R} = \alpha_i + \dfrac{2}{L}\ln\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)$

2) La condition de resonance dans la cavité s'écrit : $2nL = m\lambda$; $m \in \mathbb{N}^*$. La différentiation de cette expression nous donne : $2Ldn = md\lambda + \lambda dm$ comme la disperssion est négligeable $dn = 0 \Longrightarrow dm = -m\dfrac{d\lambda}{\lambda} = -\dfrac{2nL}{\lambda}\dfrac{d\lambda}{\lambda}$

   Le nombre des modes excités est : $M = |\Delta m| = \dfrac{2nL}{\lambda^2}\Delta\lambda$

   $\Delta m = 1 \Longrightarrow \Delta\lambda = \dfrac{\lambda^2}{2nL}$,or $f = \dfrac{c}{\lambda} \Longrightarrow \Delta f = -c\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda^2} \Longrightarrow \Delta f = \dfrac{c}{2nL}$

3) En comparant les deux termes représentants l'atténuation dans la cavité

   $\exp(-\dfrac{t}{\tau_p})$ et $\exp(-\alpha_t x)$; $\alpha_t = g_s$

   on trouve $\dfrac{t}{\tau_p} = g_s x = g_s vt = g_s\dfrac{c}{n}t$

   $$\Longrightarrow \tau_p = \frac{n}{cg_s} = \frac{nL}{c\left(\alpha_i L + \ln\left(\frac{1}{R}\right)\right)} = \frac{nL}{c\left[\alpha_i L + \ln(n+1) - \ln(n+1)\right]}$$

4) $g_s = g_s = \alpha_i + \dfrac{1}{L}Log\dfrac{1}{R} = 600 + \dfrac{2\times 10^6}{500}\ln\left(\dfrac{3.6+1}{3.6-1}\right) = 2882.2\ \text{m}^{-1}$

   $E_g = \hbar\omega = \dfrac{hc}{\lambda} \Longrightarrow \lambda(\mu\text{m}) = \dfrac{1.24}{E_g(\text{eV})} = \dfrac{1.24}{1.3} = 0.953\,85$

   $M = \dfrac{2nL}{\lambda^2}\Delta\lambda = \dfrac{2\times 3.6\times 500\times 0.1}{(0.95385)^2} \approx 395$ modes.

   $\Delta f = \dfrac{c}{2nL} = \dfrac{3\times 10^8}{2\times 3.6\times 500\times 10^{-6}} = 8.333\,3\times 10^{10}Hz = 83.3$ GHz

   $\tau_p = \dfrac{n}{cg_s} = \dfrac{3.6}{3\times 10^8\times 2882.2} = 4.163\,5\times 10^{-12}s = 4.16$ ps

5) l'efficacité quantique de diode laser est donnée par

$$\eta = \frac{N_p}{N_r} = \frac{P/\hbar\omega}{(I - I_s)/e} = \frac{P.e}{\hbar\omega(I - I_s)} \Longrightarrow P = \eta\frac{\hbar\omega}{e}(I - I_s)$$

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = \eta\dfrac{\hbar\omega}{e}(I_1 - I_s) \\ P_2 = \eta\dfrac{\hbar\omega}{e}(I_2 - I_s) \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{I_1 - I_s}{I_2 - I_s}$$

$$\frac{1.17}{1.95} = \frac{3 - I_s}{3.8 - I_s} \Longrightarrow 1.17 \times (3.8 - I_s) = 1.95 \times (3 - I_s)$$

$$\Longrightarrow 1.17 \times 3.8 - 1.95 \times 3 = -1.404 = (1.17 - 1.95) I_s = -.78 I_s$$

$$\Longrightarrow I_s = \frac{1.404}{0.78} = 1.8$$

$$\eta = \frac{P.e}{\hbar\omega(I - I_s)} = \frac{P}{E_g(I - I_s)} = \frac{1.17}{1.3 \times (3 - 1.8)} = .75$$

6) la formule donnant le temps de réponse est $t_d = \tau_e \ln\dfrac{I}{I - I_s}$

la valeur numérique $t_d = 3\ln\dfrac{3}{3 - 1.8} = 2.7489 ns$

Le courant de prépolarisation qui réduit t_d au moitié est I_p tel que

$$t'_d = \tfrac{1}{2}t_d = \tau_e \ln\frac{I - I_p}{I - I_s} \Longrightarrow \frac{I - I_p}{I - I_s} = \exp\left(\frac{t_d}{2\tau_e}\right)$$

$$\Longrightarrow I_p = I - (I - I_s)\exp\left(\frac{t_d}{2\tau_e}\right) = 3 - (3 - 1.8)\exp\left(\frac{2.7489}{2 \times 3}\right) = 1.1026 \text{ mA}$$

Exercise 5 *Une fibre optique à saut d'indice de longueur $L = 8$ km , d'indices n (du coeur) et n_g (de gaine) .*

1. L'ouverture numérique de cette fibre est 0.2 la différence d'indices est $\Delta = 0.0086$. calculer n et n_g
2. Combien des modes peut-on exciter dans cette fibre. Donner les résultats en fonction de la longueur d'onde utilisée λ et du rayon du coeur a.
3. Si on veut utiliser cette fibre comme monomode à $\lambda = 1.55\mu m$,quelle est la valeur de a correspondante.
4. Etablir une relation simple entre l'élargissement temporel dû à la dispersion intermodale et l'ouverture numérique.
5. De combien s'étale l'impulsion, de largeur spectrale $\Delta\lambda = 0.05\mu m$ à la sortie de la fibre si $\left|\dfrac{d^2n}{d\lambda^2}\right| = 0.04\ \mu m^{-2}$, et on néglige les dispersions du guide.
6. Sachant que l'atténuation linéique dans la fibre est 0,15 dB/km, la source fournit une puissance de 2 mW, on reçoit à la sortie 1.2 mW de puissance. Calculer , en dB, la petre introduit par la lentille.

Solution 6 *:*

1. $ON = 0.2$, $\Delta = \dfrac{n^2 - n_g^2}{2n^2} = \dfrac{ON^2}{2n^2} \Longrightarrow n = \dfrac{ON}{\sqrt{2\Delta}} = \dfrac{0.2}{\sqrt{2 \times 0.0086}} = 1.525$

   $n_g = \sqrt{n^2 - ON^2} = \sqrt{(1.525)^2 - (0.2)^2} = 1.5118$

2. Fibre à saut d'indice, le nombre maximal des modes guidés est

   $M = \dfrac{V^2}{2} = \dfrac{k^2 a^2 ON^2}{2} = \dfrac{2\pi^2 a^2 ON^2}{\lambda^2} = \dfrac{2\pi^2 (0.2)^2 a^2}{\lambda^2} = 0.08\pi^2 \dfrac{a^2}{\lambda^2}$

3. $a = \dfrac{\lambda}{\pi}\sqrt{\dfrac{M}{0.08}}$ pour $M = 1$ et $\lambda = 1.55\mu$m on aura $a = \dfrac{1.55}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{0.08}} = 1.7444\ \mu$m

4. On démontre (c.f. cours)que

   $\Delta t_n = \dfrac{L}{2cn}(ON)^2 = \dfrac{8 \times 10^3 (0.2)^2}{2 \times 3 \times 10^8 \times 1.525} = 3.4973 \times 10^{-7} s \cong 0.35\mu s$

5. La dispersion chromatique

   $\Delta t_m = M_d L \Delta\lambda = \dfrac{\lambda}{c}\dfrac{d^2 n}{d\lambda^2} L\Delta\lambda$

   $= \dfrac{1.55 \times 10^{-6}}{3 \times 10^8} \times 0.04 \times 10^{12} \times 8 \times 10^3 \times 0.05 \times 10^{-6}$

   $= 8.2667 \times 10^{-8} s = 0.0826\mu s$

   $\Delta t = \sqrt{\Delta t_n^2 + \Delta t_m^2} = \sqrt{(0.35)^2 + (0.0826)^2} = 0.35961\mu s$

6. La perte due à la propgation dans la fibre est

   $\alpha_f = \dfrac{10}{L}\log\dfrac{p_s}{p_e} \Longrightarrow p_e = p_s 10^{\frac{\alpha_f \times L}{10}} = 1.2 \times 10^{\frac{0.15 \times 8}{10}} = 1.582$

   avec p_s la puissance à la sortie et $p_e$la puissnace injectée à l'entree de la fibre

   Si p_i est la puissnce émise par la source alors la lentille introuduit la perte

   $\alpha_l = 10\log_{10}\dfrac{p_e}{p_i} = 10\log_{10}\dfrac{1.582}{2} = -1.0182$dB

Exercise 7 *Un signal dans la bande de fréquence* $[\omega_0 - \omega, \omega_0 + \omega]$ *se propage dans un milieu dispersif d'indice de réfraction* n *dont la vitesse de groupe est définie par* $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$ *et* $k = \dfrac{\omega n}{c}$ *. On désigne par* τ *le délai de transit sur* 1 *mètre de distance.*

1. Calculer la différence de transit $\Delta\tau$ en fonction de ω et $\dfrac{d^2 k}{d\omega^2}$

2. Exprimer la vitesse du groupe v_g en fonction de l'indice n, la célérité de la lumière c et la longueur d'onde λ, en démontrant que $\dfrac{d\omega}{\omega} = -\dfrac{d\lambda}{\lambda}$ déduire l'indice de groupe N_g.

3. Calculer l'expression du coefficient de dispersion $D = \dfrac{d\tau}{d\lambda}$. en fonction de n et λ puis en fonction de k et ω

Solution 8 *:*

1. La différence de transit est $\Delta\tau = \dfrac{d\tau}{d\omega}\Delta\omega$ avec $\tau = \dfrac{1}{v_g}$, $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$

   et $\Delta\omega = (\omega_0 + \omega) - (\omega_0 - \omega) = 2\omega$

   $$\Longrightarrow \Delta\tau = \left(\frac{d}{d\omega}\frac{1}{v_g}\right)\Delta\omega = \left(\frac{d}{d\omega}\frac{dk}{d\omega}\right)\Delta\omega = \frac{d^2k}{d\omega^2}\Delta\omega = 2\omega\frac{d^2k}{d\omega^2}$$

2. $\dfrac{dk}{d\omega} = \dfrac{1}{v_g} = \dfrac{d}{d\omega}\left(\dfrac{\omega n}{c}\right) = \dfrac{1}{c}\left(n + \omega\dfrac{dn}{d\omega}\right)$

   On a $\omega = \dfrac{2\pi c}{\lambda} \Longrightarrow d\omega = -\dfrac{2\pi c}{\lambda^2}d\lambda = -\dfrac{\omega}{\lambda}d\lambda$

   $$\Longrightarrow \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{v_g} = \frac{1}{c}\left(n + \omega\frac{dn}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\omega}\right)$$

   $$= \frac{1}{c}\left(n + \omega\left(-\frac{dn}{d\lambda}\frac{\lambda}{\omega}\right)\right) = \frac{1}{c}\left(n - \lambda\frac{dn}{d\lambda}\right)$$

   L'indice de groupe est : $N_g = \dfrac{c}{v_g} = n - \lambda\dfrac{dn}{d\lambda}$

3. $D = \dfrac{d\tau}{d\lambda} = \dfrac{d}{d\lambda}\left(\dfrac{1}{v_g}\right) = \dfrac{d}{d\lambda}\left[\dfrac{1}{c}\left(n - \lambda\dfrac{dn}{d\lambda}\right)\right]$

   $$= \frac{1}{c}\left[\frac{dn}{d\lambda} - \frac{d}{d\lambda}\left(\lambda\frac{dn}{d\lambda}\right)\right]$$

   $$= \frac{1}{c}\left[\frac{dn}{d\lambda} - \frac{d\lambda}{d\lambda}\frac{dn}{d\lambda} - \lambda\frac{d^2n}{d\lambda^2}\right] = -\frac{\lambda}{c}\frac{d^2n}{d\lambda^2}$$

   $D = \dfrac{d\tau}{d\lambda} = \dfrac{d\tau}{d\omega}\dfrac{d\omega}{d\lambda} = -\dfrac{\omega}{\lambda}\dfrac{d\tau}{d\omega} = -\dfrac{\omega}{\lambda}\dfrac{d^2k}{d\omega^2}$ avec $\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega}$

   on obtient

   $$D = -\frac{\omega^2}{2\pi c}\frac{d^2k}{d\omega^2}$$

Formulaire

I. Guide D'onde plan

1. Constante de propagation $\beta = \sqrt{k^2n^2 - (m+1)^2\dfrac{\pi^2}{h^2}}$

2. Angle de Propagation $\cos\theta_m = \dfrac{(m+1)\,\pi}{knh}$

3. Nombre des modes $M = \dfrac{2h}{\lambda}\sqrt{n^2 - n_1^2}$

4. Effet de Goos-Heanchean $x_m = \dfrac{1}{\sqrt{\beta_m^2 - k^2n_1^2}}$

5. $|r_\perp| = \left|\dfrac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2}\right|$, $|r_{//}| = \left|\dfrac{n_1\cos\theta_2 - n_2\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_2 + n_2\cos\theta_1}\right|$

II. Fibre Optique

1. Profile d'indice: $n(r) = n_1\sqrt{1-2\Delta\frac{r^2}{a^2}}$
2. Différence d'indice $\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}$
3. Ouverture Numérique: $ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$
4. Nombre de modes $M = \frac{V^2}{2}\frac{\alpha}{\alpha+2}$
5. Atténuation $\alpha_{dB/km} = \frac{10}{L}\log_{10}\left(\frac{P_s}{P_e}\right)$
6. Dispersion intermodale$\Delta\tau_n = \frac{L}{2cn_1}(ON)^2$
7. Dispersion du guide $\Delta\tau_g = D_g L\Delta\lambda$
8. Dispersion du matériau $\Delta\tau_m = M_d L\Delta\lambda$
9. $M_d = -\frac{\lambda}{c}\frac{d^2n}{d\lambda^2}$
10. Indice du groupe $N_g = \frac{c}{v_g} = n - \lambda\frac{dn}{d\lambda}$
11. La différence de transit $\Delta\tau = \frac{d\tau}{d\omega}\Delta\omega$
12. Vitesse de Groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

III. Diode Laser

1. Gain de seuil : $g_s = \alpha_i + \frac{1}{L}\ln\frac{1}{R}$
2. Condition de résonance: $2nL = m\lambda$
3. Intervalle en fréquence : $\Delta f = c\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$
4. Durée de Vie du photon : $\tau_p = \frac{n}{cg_s}$
5. La puissance interne $P_i = \eta_i\frac{\hbar\omega}{e}(I - I_s)$