Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Télécommunication optique (ELE107)

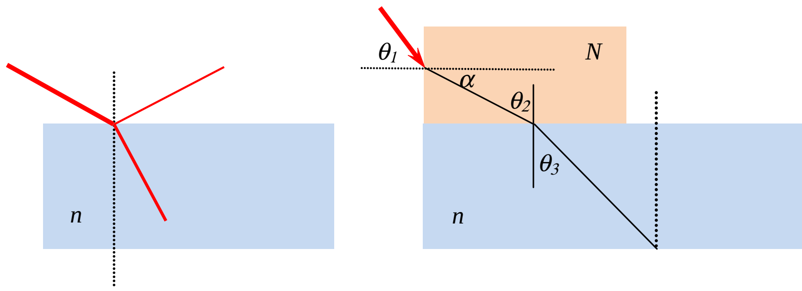
Examen Partiel **Semestre II 2011-2012**

Mercredi 2 Mai 2012 (13 h : 00 → 15 h : 00)

Documents non autorisés

Solutions

Exercice 1 *Une lame de verre d'épaisseur $h = 2\,\mu$m, d'indice de réfraction n est plongée dans l'air. Le rayon incident supposé cylindrique de section circulaire de rayon $\rho = 2\,$mm fait un angle de $30\,°$ avec la face avant de la lame, il subit une réflexion partielle et une réfraction, tel que le rayon réfléchi est perpendiculaire au rayon réfracté.*



1. Calculer l'indice de réfraction du verre, en déduire l'angle limite sur l'interface lame-air.

2. L'onde incidente est non polarisée, sa puissance est de $P_i = 1\,$mW, calculer les intensités des ondes incidente, réfléchie et réfractée.

3. Une deuxième lame, d'indice $N = \frac{3}{2}$,est collée sur la face supérieure de la lame d'indice n, la lumière est injectée du coté de l'air vers une face verticale de N, sous l'incidence θ_1.On choisit θ_1 tel que l'angle de réfraction α dans N soit $30\,°$.

   (a) Calculer les angles θ_1, θ_2 et θ_3

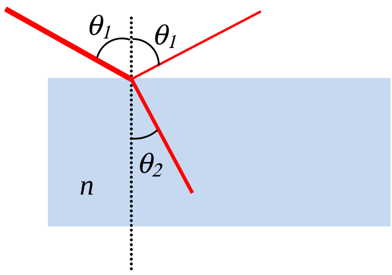
   (b) Que se passe-t-il lorsque la lumière tombe sur la face inférieure de la lame n.

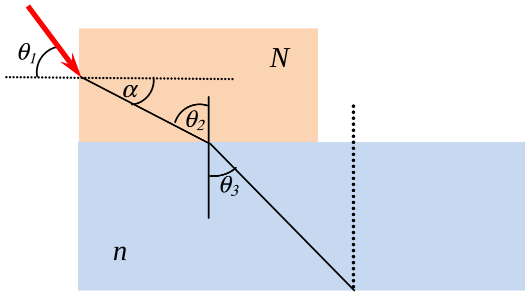
4. Dans ce cas la lame joue le rôle d'un guide d'onde plan avec la longueur d'onde $\lambda = \sqrt{2}\,\mu$m

   (a) Calculer le nombre maximal des modes guidés

   (b) Calculer l'épaisseur effective pour le mode TE_0

Solution 1 *:*





1. L'angle d'incidence est $\theta_1 = 90 - 30 = 60\,^\circ$ donc l'angle de réflexion est $\theta_1 = 60\,^\circ$ $\boxed{\text{1 point}}$
   Soit θ_2 l'angle de réfraction, puisque le rayon réfléchi est perpendiculaire au rayon réfracté alors $\theta_1 + \theta_2 = 90\,^\circ$ donc $\theta_2 = 30\,^\circ = \dfrac{\pi}{6}$ rad $\boxed{\text{2 points}}$
   D'après la loi de Descartes $n_1 \sin\theta_1 = n \sin\theta_2$ on a
   $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = n \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) \Longrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{n}{2} \Longrightarrow n = \sqrt{3}$ $\boxed{\text{3 points}}$
   L'angle limite est $\theta_\ell = \arcsin\left(\dfrac{1}{n}\right) = \arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = 35.264\,^\circ$ $\boxed{\text{2 points}}$

2. L'intensité est par définition $I = \dfrac{P}{S}$ où S est la section du rayon :
   $S = \pi\rho^2 = 4\pi\,\mathrm{mm}^2 = 4\pi \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2$
   Alors l'intensité du rayon incident est : $I = \dfrac{10^{-3}}{4\pi \times 10^{-6}} = \dfrac{10^3}{4\pi}$ W/ m^2. $\boxed{\text{2 points}}$
   Pour la composante $\perp$ on a :
   $$r_\perp = \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2} = \frac{\cos\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{2}\boxed{\text{4 points}}$$
   Le coefficient de réflexion de l'intensité est $R = |r_\perp|^2 = \dfrac{1}{4}$ donc l'intensité réflechie est : $I_r = \dfrac{I}{4} = \dfrac{10^3}{16\pi}$ A/ m^2
   Pour la composante $\|$ on a $r_{//} = \dfrac{n_1\cos\theta_2 - n_2\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_2 + n_2\cos\theta_1} = \dfrac{\cos\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3}} = 0$
   L'onde refractée est polarisée en $\|$ son intensité est :
   $I_t = I - I_r = \dfrac{10^3}{4\pi} - \dfrac{10^3}{16\pi} = \dfrac{3 \times 10^3}{16\pi}$ W/ m^2 $\boxed{\text{2 points}}$

3. $N = \dfrac{3}{2}$ et $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$
   (a) Sur l'interface $(1 \to N)$ on a
   $\sin\theta_1 = N\sin\alpha = \dfrac{3}{2}\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3}{4} \Longrightarrow \theta_1 = \arcsin\left(\dfrac{3}{4}\right) = 48.59\,^\circ$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\alpha+\theta_2=\dfrac{\pi}{2}\Longrightarrow\theta_2=60\,^\circ=\dfrac{\pi}{3}\,\text{rad}$ $\boxed{\text{1 point}}$
Sur l'interface $(N\rightarrow n)$: $N\sin\theta_2=n\sin\theta_3$
$\dfrac{3}{2}\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}\sin\theta_3\Longrightarrow\dfrac{3}{4}\sqrt{3}=\sqrt{3}\sin\theta_3$
$\Longrightarrow\sin\theta_3=\dfrac{3}{4}\Longrightarrow\theta_3=48.\,59\,^\circ$ $\boxed{\text{2 points}}$

(b) On a $\theta_3>\theta_\ell$ donc sur l'interface $(n\rightarrow 1)$ la lumière subit une réflexion totale. $\boxed{\text{2 points}}$

4. $\lambda=\sqrt{2}\,\mu\text{m}$

(a) $M=\left\lfloor\dfrac{2\pi}{\lambda}h\sqrt{n^2-1}\right\rfloor=\left\lfloor\dfrac{2\pi}{\sqrt{2}}(2)\sqrt{3-1}\right\rfloor=\lfloor 4\pi\rfloor=12$ modes $\boxed{\text{2 points}}$

(b) $\beta_0^2=k^2n^2-\dfrac{\pi^2}{h^2}=\dfrac{4\pi^2}{\lambda^2}-\dfrac{\pi^2}{h^2}=\pi^2\left(\dfrac{4}{2}-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{7}{4}\pi^2$
Effet de Goos-Heanchean :
$x_0=\dfrac{1}{\sqrt{\beta_0^2-k^2n_1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{7}{4}\pi^2-\dfrac{\pi^2}{2}}}=\dfrac{2}{\pi\sqrt{5}}=0.284\,71\,\mu\text{m}$ $\boxed{\text{2 points}}$
$h^*=h+2x_0=2+2\,(0.284\,71)\;\mu\text{m}$ $\boxed{\text{1 point}}$

Exercice 2 *On considère une fibre optique à gradient d'indice de longueur* $L=15\,\text{km}$ *son profil est donné par:*

$$n\,(r)=\frac{3}{2}\sqrt{1-2\Delta\left(\frac{r}{20}\right)^2}$$

où r *est exprimé en* μm *et* $\Delta=0.01$ *est la différence relative des indices.*

Une impulsion de longueur d'onde $\lambda=1.5\,\mu\text{m}$ *de puissance* $P=10\,\text{mW}$ *est injectée dans la fibre.*

1. Calculer l'indice de réfraction de gaine, l'ouvertuer numérique et le nombre maximal des modes guidés.
2. La puissance optique reçue à la sortie est la moitié de celle d'entrée. Déterminer le facteur d'atténuation par km.
3. La dispersion chromatique s'annule pour $\lambda=1.5\,\mu$m,et les dispersions du guide et de polarisation sont négligeables. Calculer la bande passante maximale dans ce cas.

Solution 2 *:*

1. $n_1=n\,(0)=\dfrac{3}{2}$

   - En utilisant la formule: $\Delta=\dfrac{n_1^2-n_2^2}{2n_1^2}\Longrightarrow 2\Delta n_1^2=n_1^2-n_2^2$

   alors on trouve : $n_2=n_1\sqrt{1-2\Delta}=\dfrac{3}{2}\sqrt{1-0.02}=1.\,484\,9\simeq1.485$ $\boxed{\text{4 points}}$
   ou bien on peut utliser la relation $\Delta=\dfrac{n_1-n_2}{n_1}$
   dans ce cas on aura : $n_2=n_1\,(1-\Delta)=1.5\,(1-0.01)=1.\,485$

- $ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = n_1\sqrt{2\Delta} = \frac{3}{2}\sqrt{0.02} = 0.212\,13$ $\boxed{\text{3 points}}$
- $M = \frac{V^2}{2}\frac{\alpha}{\alpha+2} = \frac{V^2}{4}$

  $V = kaON = \frac{2\pi}{\lambda}aON = \frac{2\pi}{3/2} \times 20 \times 0.212\,13 = 5.\,656\,8\pi$

  Donc : $M = \left\lfloor \frac{(5.\,656\,8\pi)^2}{4} \right\rfloor = 78$ modes $\boxed{\text{4 points}}$

2. $\alpha_{dB/\,\mathrm{km}} = \frac{10}{L}\log_{10}\frac{P_s}{P_e} = \frac{10}{L}\log_{10}\frac{P_s}{2P_s} = -\frac{10}{15}\log_{10}2 \simeq -0.2\ dB/\,\mathrm{km}.$ $\boxed{\text{4 points}}$

3. $\Delta\tau_n = \frac{L}{2cn_1}(ON)^2 = \frac{15 \times 10^3}{2 \times 3 \times 10^8 \times 1.5} \times (0.045\,) = 7.\,5 \times 10^{-7}\ \mathrm{s}$ $\boxed{\text{4 points}}$

   $B = \frac{1}{\Delta\tau_n} = \frac{1}{7.\,5 \times 10^{-7}}\,\mathrm{Hz} = 1.\,333\,3 \times 10^6\,\mathrm{Hz}$ $\boxed{\text{1 point}}$

Exercice 3 *L'intensité électrique d'une onde plane linéairement polarisée qui propage dans la direction de z positif dans l'eau de la mer est :*

$$E = 100\cos\left(10^7\pi t\right)a_x\ \ \mathrm{V/\,m} \quad a\ z = 0$$

Les paramètres de l'eau de la mer sont : $\varepsilon = 72$, $\mu = 1$ *et* $\sigma = 4\,\mathrm{S/\,m}$

1. Déterminer :
   - L'atténuation d'onde.
   - Sa constante de phase.
   - L'impédance intrinsèque
   - La vitesse de phase et la longueur d'onde.
   - La profondeur de pénétration.
2. Ecrire l'expression de $E(z,t)$ et $H(z,t)$ pour $z = 0.8\,\mathrm{m}$ en fonction du temps.

Exercice 4 *On rappelle que dans un guide rectangulaire, propageant le mode TE_{mn}, la composante H_z du champs électromagnétique s'écrit :*

$$H_z = H_0\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta z}$$

On fait propager dans ce guide, dont $a = 1.012\,\mathrm{cm}$ *et* $b = 2.286\,\mathrm{cm}$, *une onde suivant le mode* TE_{01}

1. Quel est le domaine de fréquence utilisable?
2. Exprimer les composantes du champ pour ce mode.
3. Calculer la puissance transportée.

Formulaires

Guide d'onde plan:

$\beta_m = \sqrt{k^2 n^2 - (m+1)^2 \dfrac{\pi^2}{h^2}}$ Effet de Goos-Heanchean : $x_m = \dfrac{1}{\sqrt{\beta_m^2 - k^2 n_1^2}}$

$r_\perp = \dfrac{n_1 \cos\theta_1 - n_2 \cos\theta_2}{n_1 \cos\theta_1 + n_2 \cos\theta_2}$ $r_{//} = \dfrac{n_1 \cos\theta_2 - n_2 \cos\theta_1}{n_1 \cos\theta_2 + n_2 \cos\theta_1}$

Fibre optique

$ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ $M = \dfrac{V^2}{2} \dfrac{\alpha}{\alpha + 2}$

$\alpha_{dB/\,\mathrm{km}} = \dfrac{10}{L} \log_{10}\left(\dfrac{P_s}{P_e}\right)$ $\Delta\tau_n = \dfrac{L}{2cn_1} (ON)^2$