Télécommunication optique ELE107 **Examen Final 2005-2006**

Solutions

Exercice 1 ***On considère les deux ondes électromagnétiques harmoniques:*** E_1 ***et*** E_2;

$E_1 = A_1 \cos(\omega t - kz + \varphi_1)$ ***et*** $E_2 = A_2 \cos(\omega t - kz + \varphi_2)$

1. **Donner l'expression de l'onde résultante:** $E = A\cos(\omega t - kz + \varphi)$ **en précisant les expressions de l'amplitude et de la phase**

$A\cos(\omega t - kz + \varphi) = A_1 \cos(\omega t - kz + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t - kz + \varphi_2)$

$A\cos(\alpha + \varphi) = A_1 \cos(\alpha + \varphi_1) + A_2 \cos(\alpha + \varphi_2)$

$= A_1 \cos\alpha \cos\varphi_1 + A_2 \cos\alpha \cos\varphi_2 - A_1 \sin\alpha \sin\varphi_1 - A_2 \sin\alpha \sin\varphi_2$

$= (A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2)\cos\alpha + (-A_1 \sin\varphi_1 - A_2 \sin\varphi_2)\sin\alpha$

$= A\cos\alpha\cos\varphi - A\sin\alpha\sin\varphi$

$\Longrightarrow A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$

$\tan\varphi = \dfrac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$

2. **Déterminer l'amplitude, la phase, la fréquence, la période, la norme du vecteur d'onde, la longueur d'onde, la vitesse et la direction de propagation de l'onde résultante si on a**

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{2y}{x^2+y^2}\sin\left(10^{15}t - 10z - \frac{\pi}{3}\right) \\ E_2 &= \frac{-x}{x^2+y^2}\sin\left(10^{15}t - 10z + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

On a $A_1 = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$, $A_2 = \dfrac{-x}{x^2+y^2}$, $\varphi_1 = \dfrac{-\pi}{3}$, et $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{4}$

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$

$= \sqrt{\left(\dfrac{2y}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\dfrac{-x}{x^2+y^2}\right)^2 - 2\dfrac{x}{x^2+y^2} \times \dfrac{2y}{x^2+y^2}\cos\left(-\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right)}$

$= \dfrac{\sqrt{(x^2 + 4y^2 - \sqrt{2}xy + \sqrt{6}xy)}}{(x^2+y^2)}$

$\tan\varphi = \dfrac{2y\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) - x\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2y\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - x\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = -\dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{2}x + \sqrt{3}y}{y - \frac{1}{2}\sqrt{2}x} = \dfrac{\sqrt{2}x + 2\sqrt{3}y}{\sqrt{2}x - 2y}$

Exercice 2 ***Un guide d'onde plan est constitué d'une couche cœur d'indice n, d'épaisseur h et limitée par deux milieux identiques semi infinis d'indice n', dans laquelle on excite des modes TE en utilisant une lumière supposée monochromatique de longueur d'onde λ. On désigne par β_m la constante de propagation longitudinale du mode d'ordre m et par θ_m l'angle de propagation correspondant***

1. **Etablire l'expression de β_m en fonction de n, λ, m et h. Déduire celle de θ_m et le nombre maximal de modes M**

   $\boxed{\textbf{cours}}$ Constante de propagation: $\beta = \sqrt{k^2n^2 - (m+1)^2 \dfrac{\pi^2}{h^2}}$

   Angle de propagation $\cos\theta_m = \dfrac{(m+1)\pi}{knh}$

   Nombre des modes: $M = \dfrac{2h}{\lambda}\sqrt{n^2 - n'^2}$

2. **Calculer les valeurs numériques de M, $\beta_0, \theta_0, \beta_1$ et θ_1 si on a:** $n = 1.52$ **,** $n' = 1.42$, $h = 30\,\mu\text{m}$ **et** $\lambda = 0.85\,\mu\text{m}$

   $M = \dfrac{2h}{\lambda}\sqrt{n^2 - n'^2} = \dfrac{2\times 30}{0.85}\sqrt{(1.52)^2 - (1.42)^2} \simeq 38$

   $\beta_0 = \sqrt{k^2n^2 - \dfrac{\pi^2}{h^2}} = \sqrt{\left(\dfrac{2\pi\times 1.52}{0.85}\right)^2 - \dfrac{\pi^2}{(30)^2}} = 11.235\,\mu\text{m}^{-1}$

   $\beta_1 = \sqrt{k^2n^2 - \dfrac{4\pi^2}{h^2}} = \sqrt{\left(\dfrac{2\pi\times 1.52}{0.85}\right)^2 - \dfrac{4\pi^2}{(30)^2}} = 11.234\,\mu\text{m}^{-1}$

   $\cos\theta_0 = \dfrac{\pi}{knh} = \dfrac{\lambda}{2nh} = \dfrac{0.85}{2\times 1.52\times 30} = 9.3202\times 10^{-3}$

   $\Longrightarrow \theta_0 = \arccos\left(9.3202\times 10^{-3}\right) = 1.5615\,\text{rad} = 89.467\,^\circ$

   $\cos\theta_1 = \dfrac{2\pi}{knh} = \dfrac{\lambda}{nh} = \dfrac{0.85}{1.52\times 30} = 0.01864$

   $\Longrightarrow \theta_1 = \arccos(0.01864) = 1.5522\,\text{rad} = 88.935\,^\circ$

3. **On utilise au lieu du milieu n' un autre milieu d'indice $n'' = 1.48$ et on conserve les mêmes paramètres de la couche cœur, quelle longueur d'onde faut-il utiliser pour conserver le même nombre maximale de modes**

   $M = \dfrac{2h}{\lambda}\sqrt{n^2 - n'^2} = \dfrac{2h}{\lambda'}\sqrt{n^2 - n''^2}$

   $\Longrightarrow \lambda' = \lambda\dfrac{\sqrt{n^2 - n''^2}}{\sqrt{n^2 - n'^2}} = 0.85\dfrac{\sqrt{(1.52)^2 - (1.48)^2}}{\sqrt{(1.52)^2 - (1.42)^2}} = 0.54305\,\mu\text{m}$

4. **Comparer dans les deux cas les valeurs de l'épaisseur effectives pour le modes TE_0**

   $x_m = \dfrac{1}{\sqrt{\beta_m^2 - k^2n_1^2}}$

$$x'_0 = \frac{1}{\sqrt{\beta_0^2 - k^2 n'^2}} = \frac{1}{\sqrt{\beta_0^2 - \left(\frac{2\pi n'}{\lambda}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(11.235)^2 - \left(\frac{2\pi \times 1.42}{0.85}\right)^2}} = 0.249\,64\,\mu\text{m}$$

$h'^* = h + 2x'_0 = 30 + 2 \times 0.249\,64 = 30.499 \;\; \mu\text{m}$

$$\beta''_0 = \frac{2\pi}{\lambda'} \sin\theta_0 = \frac{2\pi}{0.543\,05} \sin(1.561\,5) = 3.682\,7\pi = 11.570$$

$$x'_0 = \frac{1}{\sqrt{\beta_0'^2 - k^2 n'^2}} = \frac{1}{\sqrt{\beta_0'^2 - \left(\frac{2\pi n''}{\lambda'}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(11.570)^2 - \left(\frac{2\pi \times 1.48}{0.54305}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{133.86 - 29.71\pi^2}} = -7.921\,4 \times 10^{-2} j$$

ou si on conserve l'ancienne β_0 :

$$x'_0 = \frac{1}{\sqrt{\beta_0^2 - k^2 n'^2}} = \frac{1}{\sqrt{\beta_0^2 - \left(\frac{2\pi n''}{\lambda'}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(11.235)^2 - \left(\frac{2\pi \times 1.48}{0.54305}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{12.923 j} = -7.738\,2 \times 10^{-2} j$$

on remarque que $kn" = \frac{2\pi \times 1.48}{0.54305} = 17.124 > \beta_0$ donc pas de pénétration de Goos-Henchean, mais le mode est radiatif.

Exercice 3 ***On considère une fibre optique à saut d'indice de longueur*** $L = 20$ km ***fabriquée de silice d'indice du cœur de la forme:*** $n_1 = A + B\lambda^{-2}$ ***avec*** $A = 1.583\ \mu\text{m}$ ***et*** $B = 2.174 \times 10^{-2}\ \mu\text{m}^2$ ***et de rayon*** $a = 20\mu m$***, l'indice de gaine est*** $n_2 = 1,5$ ***et on utilise une source de longueur d'onde*** $\lambda = 1.13\,\mu\text{m}$ ***et de largeur spectrale*** $\Delta\lambda = 0.01\,\mu\text{m}$

1. **Montrer que pour avoir de modes guidés, il faut injecter la lumière dans la fibre, du côté de l'air, dans un cône de révolution d'angle au sommet α, Donner, alors la définition de l'ouverture numérique et calculer sa valeur.**

   $\boxed{\textbf{cours}}$ Ouverture Numérique: $ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$

   pour $\lambda = 1.13\,\mu\text{m}$ on a $n_1 = A + B\lambda^{-2} = 1.583 + \frac{2.174 \times 10^{-2}}{(1.13)^2} = 1.6$

   $ON = \sqrt{(1.6)^2 - (1.5)^2} = 0.556\,78$

   $\alpha = \arcsin ON = \arcsin(0.556\,78) = 0.590\,5\,\text{rad} = 33.833\,°$

2. **Combien de modes peut-on guider dans cette fibre**

   Nombre de modes $M = \frac{V^2}{2}\frac{\alpha}{\alpha+2} = \frac{k^2 a^2 ON^2}{2} = 2\left(\frac{\pi \times 20 \times 0.556\,78}{1.13}\right)^2 \simeq 1917$

3. **Que doit être la valeur maximale du facteur de perte linéique** ($en\ dB/\,\mathrm{km}$) **pour avoir à la sortie le** $\frac{1}{e}$ $\grave{e}me$ **de la puissance injectée à l'entrée.** ($e = 2.718\,3$)

$$\alpha_{dB/km} = \frac{10}{L}\log_{10}\left(\frac{P_s}{P_e}\right) = \frac{10}{20}\log\left(\frac{P_e/e}{P_e}\right) = \frac{1}{2}\log_{10}\frac{1}{e} = -0.217\,15\ \mathrm{dB/\,km}$$

4. **Etablire l'expression de la dispersion intermodale**

$\boxed{\textbf{cours}}$ Dispersion intermodale $\Delta\tau_n = \frac{L}{2cn_1}\left(ON\right)^2$

5. **Calculer la valeur de l'elargissement temporel d'une impulsion optique à la sortie de la fibre si on suppose que le cœur de la fibre introduit une dispersion chromatique et de plus a un facteur de dispersion du guide** $D_g = \frac{8.37\ \lambda}{a^2 n_1}$ $\mathrm{ps\,km^{-1}\,nm^{-1}}$ **si** a **et** λ **sont exprimés en** $\mu\mathrm{m}$.

$$\Delta\tau_n = \frac{L}{2cn_1}\left(ON\right)^2 = \frac{20\times10^3\times(0.556\,78)^2}{2\times3\times10^8\times1.6} = 6.458\,4\times10^{-6}\,\mathrm{sec}$$

$$M_d = -\frac{\lambda}{c}\frac{d^2n}{d\lambda^2} = -\frac{\lambda}{c}\left(\frac{6B}{\lambda^4}\right) = -\frac{6\times2.174\ \times10^{-2}}{3\times10^5\times(1.13)^3} = -3.013\,4\times10^{-7}\,\mathrm{sec\ km^{-1}}\,\mu\mathrm{m}^{-1}$$

$$\Delta\tau_m = M_d L\Delta\lambda = -3.013\,4\times10^{-7}\times20\times0.01 = -6.026\,8\times10^{-8}\,\mathrm{sec}$$

$$D_g = \frac{8.37\ \lambda}{a^2n_1} = \frac{8.73\times1.13}{(20)^2\times1.6} = 1.541\,4\times10^{-2}\ \ \mathrm{ps\,km^{-1}\,nm^{-1}}$$

$$\Delta\tau_g = D_g L\Delta\lambda = 1.541\,4\times10^{-2}\times20\times(0.01\times10^{-3}) = 3.082\,8\times10^{-6}\,\mathrm{ps} = 3.082\,8\times10^{-18}\,\mathrm{sec}$$

$$\Delta t = \sqrt{(6.458\,4\times10^{-6})^2+(-6.026\,8\times10^{-8})^2+(3.082\,8\times10^{-18})^2} = 6.458\,7\times10^{-6}\,\mathrm{sec}$$

Exercice 4 ***La constante d'atténuation intrinsèque d'une diode laser à*** $GaAs$ ***(de permittivité diélectrique*** $\varepsilon = 13,2$***) est*** $\alpha_i = 550m^{-1}$***, les dimensions de la cavité: longueur*** $L = 600\,\mu\mathrm{m}$***, largeur*** $w = 1\,\mu\mathrm{m}$***, épaisseur*** $d = 0.5\,\mu\mathrm{m}$***. La diode émet de la lumière de longueur d'onde*** $\lambda = 0,85\,\mu\mathrm{m}$ ***de largeur spectrale*** $\Delta\lambda = 0,05\,\mu\mathrm{m}$***.***

1. **Calculer la valeur minimale du gain interne pour le déclenchement de l'effet laser**

$$g_s = \alpha_i + \frac{1}{L}\ln\frac{1}{R}$$

$$n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{13.2} = 3.633\,2 \Longrightarrow R = \left(\frac{3.6332-1}{3.6332+1}\right)^2 = 0.323$$

$$\alpha_m = \frac{1}{L}\ln\frac{1}{R} = \frac{1}{600\times10^{-6}}\ln\left(\frac{1}{0.323}\right) = 1883.\,5\,\mathrm{m^{-1}}$$

$$g_s = 550+1883.5 = 2433.\,5\,\mathrm{m^{-1}}$$

2. **Etablire l'expression de la durée de vie d'un photon à l'intérieur de la cavité et calculer sa valeur numérique**

$$P_f = P_i \exp(-\alpha z) = P_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_p}\right)$$
$$\Longrightarrow \alpha z = \alpha v t = \frac{t}{\tau_p} \Longrightarrow \frac{\alpha c}{n} = \frac{1}{\tau_p}$$
$$\Longrightarrow \tau_p = \frac{n}{\alpha c} = \frac{n}{g_s c} = \frac{3.6}{2433.5 \times 3 \times 10^8} = 4.931\,2 \times 10^{-12}\,\mathrm{sec} = 4.931\,2\,\mathrm{ps}$$

3. **Etablire la formule donnant le nombre des modes longitudinaux excités** M, **Calculer** M

   Condition de résonance: $2nL = m\lambda \Longrightarrow 0 = md\lambda + \lambda dm \Longrightarrow \Delta m = m\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2nL}{\lambda^2}\Delta\lambda$

   $$M = m_{\max} - m_{\min} = \frac{2nL}{\lambda^2}\Delta\lambda = \frac{2 \times 3.633\,2 \times 600}{(0.85)^2} \times 0.05 = 301$$

   Intervalle en fréquence : $\Delta f = c\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = 3 \times 10^8 \times 10^6 \frac{0.05}{(0.85)^2} = 2.076\,1 \times 10^{13}\,\mathrm{Hz}$

4. **Calculer la densité des électrons recombinés sous l'intensité du courant de densité** $j = 3 \times 10^6\,\mathrm{A\,m^{-2}}$ **sachant que la densité du courant de seuil est** $j_s = 2 \times 10^6\ \mathrm{A\,m^{-2}}$.

   $$N_e = \frac{I - I_s}{e \times V} = \frac{(j - j_s) \times L \times w}{e \times L \times w \times d} = \frac{(j - j_s)}{e \times d}$$
   $$= \frac{(3-2) \times 10^6}{1.6 \times 10^{-19} \times 0.5 \times 10^{-6}} = 1.25 \times 10^{31}\,\mathrm{m^{-3}}$$

5. **Calculer la puissance optique émise à l'extérieure si l'efficacité quantique est** $\eta_i = 75\%$

   $$P_e = \frac{P_i}{2}\frac{\alpha_m}{\alpha_i + \alpha_m}$$
   $$P_i = \eta_i \frac{\hbar\omega}{e}(I - I_s) = \eta_i \frac{hc}{e\lambda}(I - I_s) = \eta_i \frac{1.24}{\lambda_{\mu\mathrm{m}}}(I - I_s)$$
   $$I = j \times L \times w = 3 \times 10^6 \times 600 \times 10^{-6} \times 1 \times 10^{-6} = 1.8\,\mathrm{mA}$$
   $$I_s = j_s \times L \times w = 2 \times 10^6 \times 600 \times 10^{-6} \times 1 \times 10^{-6} = 1.2\,\mathrm{mA}$$
   $$P_i = \eta_i \frac{1.24}{\lambda_{\mu\mathrm{m}}}(I - I_s) = 0.75 \times \frac{1.24}{0.85} \times (1.8 - 1.2) = 0.656\,47\,\mathrm{mW}$$
   $$P_e = \frac{0.656\,47}{2} \times \frac{1883.5}{550 + 1883.5} = 0.254\,05\,\mathrm{mW}$$

Exercice 5 ***Une photodiode à*** $GaAs$ ***d'énergie de gap*** $E_g = 1.45$ eV, ***d'indice de réfraction*** $n = 3.5$ ***. Le coefficient d'absorption à la longueur d'onde*** $\lambda = 1.15\,\mu\mathrm{m}$ ***de la zone*** P ***est*** $\alpha_p = 10^5\,\mathrm{m^{-1}}$, ***la largeur de la zone désertée est*** $w_d = 60\,\mu\mathrm{m}$, ***dont le Le coefficient d'absorption est*** $\alpha_d = 2 \times 10^5\,\mathrm{m^{-1}}$ ***la photodiode reçoit des photons du côté de la zone*** P ***de largeur:*** $w_p = 10\,\mu\mathrm{m}$

1. **Quelle est la longueur d'onde de seuil de cette photodiode.**

   $h\nu \geq E_g \Longleftrightarrow \dfrac{hc}{\lambda} \geq E_g$

   $\Longrightarrow \lambda \leq \lambda_s = \dfrac{hc}{E_g} \Longrightarrow \lambda_s\,(\mu\text{m}) = \dfrac{1.24}{E_g\,(\text{eV})} = \dfrac{1.24}{1.45} = 0.855\,17\,\mu\text{m}$

2. **Etablir l'expression de l'efficacité quantique en fonction de** $\alpha_p, \alpha_d, w_d, w_p$ **et** n **. Calculer sa valeur numérique.**

   $\boxed{\textbf{cours}}$ l'efficacité quantique $\eta = (1 - R)\exp(-\alpha_p w_p)\,[1 - \exp(-\alpha_d w_d)]$

   $R = \left(\dfrac{3.5 - 1}{3.5 + 1}\right)^2 = 0.308\,64$

   $\eta = (1 - 0.308\,64) \times \exp(-10^5 \times 10 \times 10^{-6}) \times (1 - \exp(-2 \times 10^5 \times 60 \times 10^{-6}))$

   $\quad = -0.691\,36 e^{-1}\,(e^{-12} - 1) = 0.254\,34 = 25.434\%$

3. **Définir la sensibilité spectrale de photodiode et calculer sa valeur numérique et en déduire l'intensité du photocourant généré en absorbant la puissance optique de** $3.\,\text{mW}$

   $S_\lambda = \dfrac{I_p}{P_i} = \eta \dfrac{\lambda_{\mu\text{m}}}{1.24} = 0.254\,34 \times \dfrac{1.15}{1.24} = 0.235\,88$

   $I_P = S_\lambda P_i = 0.235\,88 \times 3 = 0.707\,64\,\text{mW}$

   Mais il faut noter que la longueur d'onde utiliser est $\lambda = 1.15\,\mu\text{m} > \lambda_s$ *c'est cette photodiode ne fonctionne pas avec telle longueur d'onde et donc pas de photocourant généré*