Bases de l'optique physique

Exrcices corrigés

Exercice 1 *On considère les deux ondes électromagnétiques harmoniques : E_1 et E_2 :*

$$E_1 = A_1 \cos(\omega t - kz + \varphi_1)$$
$$E_2 = A_2 \cos(\omega t - kz + \varphi_2)$$

1. *Donner l'expression de l'onde résultante : $E = E_1 + E_2$ en précisant les expressions de l'amplitude et de la phase*
2. *Déterminer l'amplitude, la phase, la fréquence, la période, la norme du vecteur d'onde, la longueur d'onde, la vitesse et la direction de propagation de l'onde résultante si on a :*

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{2y}{x^2+y^2} \sin\left(2\times 10^{15} t - 10z - \frac{\pi}{2}\right) \\ E_2 &= \frac{-x}{x^2+y^2} \sin\left(2\times 10^{15} t - 10z\right) \end{aligned}$$

Solution 1

1. On exprime E sous la forme : $E = E_1 \sin(\alpha - \varphi_1) + E_2 \sin(\alpha - \varphi_2)$ avec $\alpha = kx - \omega t$ on trouve :

$$\begin{aligned} E &= E_1 \sin(\alpha - \varphi_1) + E_2 \sin(\alpha - \varphi_2) \\ &= E_1 \sin\alpha \cos\varphi_1 - E_1 \cos\alpha \sin\varphi_1 + E_2 \sin\alpha \cos\varphi_2 - E_2 \cos\alpha \sin\varphi_2 \\ &= (E_1 \cos\varphi_1 + E_2 \cos\varphi_2) + (E_1 \sin\varphi_1 + E_2 \sin\varphi_2) \cos\alpha \end{aligned}$$

Mais E doit être de la forme $E = A\sin(\alpha - \varphi) = A \sin\alpha \cos\varphi - A\cos\alpha \sin\varphi$
Par comparaison on aura :

$$\begin{aligned} A\cos\varphi &= E_1 \cos\varphi_1 + E_2 \cos\varphi_2 \\ A\sin\varphi &= E_1 \sin\varphi_1 + E_2 \sin\varphi_2 \end{aligned}$$

et on déduit :

$$\begin{aligned} A^2 &= (E_1\cos\varphi_1 + E_2\cos\varphi_2)^2 + (E_1 \sin\varphi_1 + E_2 \sin\varphi_2)^2 \\ &= E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \Longrightarrow \end{aligned}$$

$$A = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

et

$$\tan\varphi = \frac{E_1 \sin\varphi_1 + E_2 \sin\varphi_2}{E_1 \cos\varphi_1 + E_2 \cos\varphi_2}$$

2. $A = \sqrt{\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)\cos\pi} = \sqrt{\frac{4y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}}$

$$\tan\varphi = \frac{E_1 \sin(\pi/2) - E_2 \sin 0}{E_1 \cos(-\pi/2) + E_2 \cos(0)} = \frac{E_1}{E_2} = -\frac{y}{x}$$

$$E = \frac{\sqrt{4y^2 - x^2}}{(x^2+y^2)} \sin\left(2\times 10^{15} t - 10z - \varphi\right)$$

C'est une onde cylindrique qui se propage suivant la dorection de Oz et on a :

$$\omega = 2\times10^{15} = 2\pi f \Longrightarrow f = \frac{2\times10^{15}}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\times10^{15}\,\text{Hz} = 3.1831\times10^{14}\,\text{Hz}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{3.1831\times10^{14}} = 3.1416\times10^{-15}\,\text{s}$$

$$k = 10\,\mu\text{m}^{-1} \Longrightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{10} = 0.62832\,\mu\text{m}$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\times10^{15}}{10\times10^{6}} = 2\times10^{8}\,\text{m/s}$$

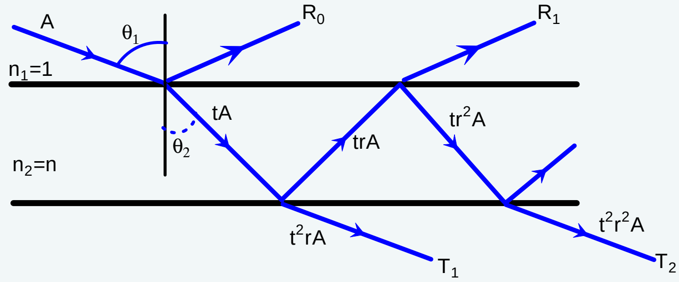
Exercice 2 *Une source optique, plongée dans l'air, émet de la lumière monochromatique vers une lame de verre d'épaisseur $e = 5cm$ et d'indice $n = 3/2$. La lumière tombe sous l'incidence de $45°$ et le champ magnétique est supposé dans le plan d'incidence.*

1. *On suppose que l'intensité optique initiale est $I_0 = 5\ \text{W/m}^2$.*
   Calculer l'intensité de la lumière réfléchie directement sur la première face et sur la deuxième.
2. *Si l'intensité décroît à l'intérieur de la lame suivant la loi : $I(x) = I_0.exp(-\alpha x)$ (par absorption) avec $\alpha = 0.01\ cm^{-1}$.*
   Calculer l'intensité du rayon émergent après 3 réflexions à l'intérieure de la lame.

Solution 2

1. $1\times\sin\theta_1 = 1.5\sin\theta_2 \Longrightarrow \sin\theta_2 = \dfrac{\sin(45°)}{1.5} = 0.47141$

$\Longrightarrow \theta_2 = \arcsin(0.47141) = 28.126°$



$$r_\perp = \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2} = \frac{n_1\cos\theta_1 - \sqrt{n_2^2 - (n_1\sin\theta_1)^2}}{n_1\cos\theta_1 + \sqrt{n_2^2 - (n_1\sin\theta_1)^2}}$$

$$= \frac{\cos(45°) - \sqrt{(1.5)^2 - (\sin(45°))^2}}{\cos(45°) + \sqrt{(1.5)^2 - (\sin(45°))^2}} = \frac{\cos(45°) - \sqrt{2.25 - \sin^2(45°)}}{\cos(45°) + \sqrt{2.25 - \sin^2(45°)}} = -0.30334$$

$$t_\perp = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2} = \frac{2\cos(45°)}{\cos(45°) + \sqrt{2.25 - \sin^2(45°)}} = 0.69666$$

$r_\perp + t_\perp = 0.30334 + 0.69666 = 1.0$

L'intensité de l'onde R_0 est $I_1 = (r_\perp)^2 I_0 = (-0.30334)^2\times5 = 0.46007578\ \text{W/m}^2$

2. L'onde réflechie sur la deuxième face a subie une transmission tout d'abord puis une réflexion, son amplitude est donc : $t\times r\times A$ l'intensité est :

$I_2 = t^2r^2I_0 = (0.69666)^2\times(-0.30334)^2\times5 = 0.22329095\ \text{W/m}^2$

3. L'onde subit 3 réflexions et 2 transmissions avec atténuation suivant la loi

$$I(x) = I_0\exp(-\alpha x)$$

en traversant la distance x dans la lame, l'intensité, à la sortie, devient :

$$I(x) = t^2r^6I_0e^{-\alpha x}$$

où x est la longueur de trajet :

$$x = 4 \times L_{rayon} = 4 \times \frac{e}{\cos\theta_2} = 4 \times \frac{5}{\cos(28.126\,°)} = 22.678\,\text{cm}$$

$$I_{sortie} = (0.696\,66)^2 \times (0.303\,34)^6 \times 5e^{-0.01\times 22.678} = 1.506\,955\,914 \times 10^{-3}\,\text{W/m}^2$$

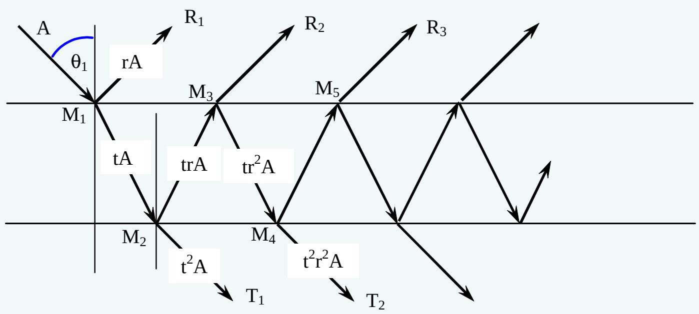
Exercice 3 *Une onde électromagnétique tombe sous l'incidence quelconque sur la face avant d'une lame à faces parallèles d'indice n et d'épaisseur e. Elle subit une suite de réflexions partielles et de réfractions sur les deux faces de la lame pour donner deux séries des rayons parallèles : Une série des rayons (réflechis et sortants de la face Supérieure) R_1, R_2,.. et une autre des rayons transmis (de la face inférieure) $T_1, T_2, \ldots$*

On suppose que le vecteur du champ électrique est dans le plan d'incidence. Calculer l'amplitude du champ résultant de chaque série. : $R_1 + R_2 + R_3 + \ldots$ et $T_1 + T_2 + T_3 \ldots$

Solution 3

Si l'onde incidente est de la forme : $E_i = Ae^{j\omega t}$alors l'onde réflechie sur la face avant $(1 \to n)$ est $R_1 = rE_i = rAe^{j\omega t}$ où r est le coefficient de réflexion.

L'onde R_2 subit une transmission dans la point M_1 vers n, une réflexion partielle sur la face inférieure au point M_2 $(n \to 1)$ puis une transmission au point M_3 vers l'extérieure alors : $R_2 = t^2 rAe^{j(\omega t-\delta)} = t^2 rE_i e^{-j\delta}$ avec δ la déphasage due à la différence de marche optique entre R_1 et R_2.



L'onde R_3 a subie 2 réflexions parielles , en M_3 et M_4 en plus que R_2 et une déphasage supplementaire (δ) :

$$R_3 = r^2 R_2 e^{-j\delta} = t^2 r^3 Ae^{j(\omega t-2\delta)} = t^2 r^3 Ae^{j\omega t} e^{-2j\delta} = t^2 r^3 E_i e^{-2j\delta}$$

et de même pour les autres. Alors :

$$R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n = rE_i + t^2 rE_i e^{-j\delta} + t^2 r^3 E_i e^{-2j\delta} + \cdots + t^2 r^{2n+1} E_i e^{-j(n+)\delta}$$
$$= rE_i + t^2 rE_i e^{-j\delta}\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^n\right) \quad \text{avec } x = r^2 e^{-j\delta}$$

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-r^2 e^{-j\delta}}$$

$$R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n = rE_i + \frac{t^2 rE_i e^{-j\delta}}{1-r^2 e^{-j\delta}}$$

Et on fait le même calcul pour trouver $T_1 + T_2 + T_3 \ldots$

Exercice 4 *On considère la réflexion d'une onde plane provenant d'un milieu d'indice de réfraction $n_1 = 1,5$ sur un milieu d'indice $n_2 = 1$, les deux milieux étant séparés par un dioptre plan.*

1. *Calculer l'angle critique de réflexion totale.*
2. *On désigne par θ_1 l'angle d'incidence et par θ_2 l'angle de réfraction. Pour $\theta_1 = 60\,°$ calculer les déphasages à la réflexion $\varphi_\perp$ et $\varphi_{//}$ pour les deux états de polarisations.*
3. *De combien les champs sont-ils atténués dans le milieu n_2 à la distance $z = \lambda_0$ de l'interface $(\theta_1 = 60\,°)$, λ_0 est la longueur d'onde dans le vide*

on donne : $r_\perp = \dfrac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2}$ $\qquad r_{//} = \dfrac{n_1\cos\theta_2 - n_2\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_2 + n_2\cos\theta_1}$

Solution 4

1. $\sin\theta_\ell = \dfrac{n_2}{n_1} = \dfrac{1}{1.5} = 0.667$

2. $\theta_1 = 60\,^\circ > \theta_\ell$ donc la lumière subit une réflexion totale et l'angle θ_2 est imaginaire on a $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1-\sin\theta_2^2} = \sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{2}\sin\left(60\,^\circ\right)\right)^2} = 0.829\,j = jB$$

$\theta_1 = 60\,^\circ \Longrightarrow \cos\theta_1 = \cos\left(60\,^\circ\right) = \cos\left(60\,^\circ\right) = 0.5$

$$r_\perp = \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2} = \exp\left(2j\delta\right) = \exp\left(j\varphi_\perp\right) = \frac{1.5\times0.5-0.829\,j}{1.5\times0.5+0.829\,j} = \frac{0.75-0.829\,j}{0.75+0.829\,j}$$

$\tan\delta = \dfrac{0.829}{0.75} = 1.11 \Longrightarrow \delta = \arctan\left(1.11\right) = \ 0.837 \text{ rad} = 48\,^\circ$

$\varphi_\perp = 2\delta = 2\times 48 = 96\,^\circ$

$$r_{//} = \frac{n_1\cos\theta_2 - n_2\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_2 + n_2\cos\theta_1} = \frac{1.5\times0.829\,j-0.5}{1.5\times0.829\,j+0.5} = \frac{-0.5+1.24j}{0.5+1.24j}$$

$\tan\delta = \dfrac{1.24}{0.5} = 2.48 \Longrightarrow \delta = \arctan\left(2.48\right) = 1.19\,\text{rad} = 68.2\,^\circ$

$\varphi_{//} = 2\delta = 2\times 68.2\,^\circ = 136.0\,^\circ$

3. $E\left(z\right) = E_0\exp\left(-kn_2Bz\right)$ avec $B = 0.829$ et $k = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}$

avec $n_2 = 1$ et $z = \lambda_0$ on trouve :

$\dfrac{E\left(z\right)}{E_0} = \exp\left(-2\pi B\right) = \exp\left(-2\pi\times0.829\right) = e^{-1.66\pi} = 0.005\,43$

Exercice 5 *Les composantes du champ électrique en un point $M(x,y,z)$ d'une onde électromagnétique qui propage, dans un milieu d'indice n suivant l'axe Oz, sont :*

$$E_x = \frac{Ax}{x^2+y^2}e^{j(\omega t-kz)}\ ;\ E_y = \frac{Ay}{x^2+y^2}e^{j(\omega t-kz)}\ ;\ \ E_z = 0$$

1. *Calculer* $\dfrac{\partial E_x}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial E_y}{\partial y}$ *Montrer que* $\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{E} = 0$

2. *Calculer les composantes du champ magnétique $\overrightarrow{H}$ en utilisant l'équation de Maxwell :*

$$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{E} = -\mu\frac{\partial\overrightarrow{H}}{\partial t}$$

3. *Établir la relation de dispersion entre k et ω grâce à l'équation de Maxwell*

$$\overrightarrow{\nabla}\times\vec{H} = \varepsilon\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$$

4. *Calculer les produits scalaire et vectoriel :$\overrightarrow{E}.\overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{E}\times\overrightarrow{H}$. Conclusion*

5. *Utiliser les équations de Maxwell pour démontrer que $H = nE$*

6. *Calculer $\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{E}$*

Solution 5

1. $\dfrac{\partial E_x}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Ax}{x^2+y^2}e^{j(\omega t-kz)}\right) = A\dfrac{-x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}e^{j(t\omega-kz)}$

$\dfrac{\partial E_y}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Ay}{x^2+y^2}e^{j(\omega t-kz)}\right) = Ae^{j(t\omega-kz)}\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

$\dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0$

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = A\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}e^{j(t\omega-kz)} + Ae^{j(t\omega-kz)}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + 0 = 0$$

2. $$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}$$

$$= \left(-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Ay}{x^2+y^2}e^{j(\omega t-kz)}\right) = -jk\frac{Ay}{x^2+y^2}e^{jt\omega-jkz} = -jkE_y$$

et de même : $\frac{\partial E_x}{\partial z} = -jkE_x$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Ay}{x^2+y^2}e^{j(\omega t-kz)}\right) = -2Axy\frac{e^{j(t\omega-kz)}}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Ax}{x^2+y^2}e^{j(\omega t-kz)}\right) = -2Axy\frac{e^{j(t\omega-kz)}}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

Finalement $\vec{\nabla}\times\vec{E} = \left(-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\vec{e_y} = jkE_y\vec{e_x} - jkE_x\vec{e_y}$

$$\vec{H} = (H_x, H_y, 0) \Longrightarrow \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \left(\frac{\partial H_x}{\partial t}, \frac{\partial H_y}{\partial t}, 0\right) = -\frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{jk}{\mu}(E_y, -E_x, 0)$$

$$H_x = -\frac{jk}{\mu}\int E_y dt = -\frac{jk}{\mu}\left(\frac{1}{j\omega}E_y\right) = -\frac{k}{\mu\omega}E_y$$

$$H_y = +\frac{jk}{\mu}\int E_x dt = \frac{jk}{\mu}\left(\frac{1}{j\omega}E_x\right) = \frac{k}{\mu\omega}E_x$$

$$\vec{H} = \frac{k}{\mu\omega}\left(-E_y\vec{e_x} + E_x\vec{e_y}\right)$$

3. $$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \left(-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}$$

$$= \frac{k}{\mu\omega}\left(-\frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{e_x} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\vec{e_y} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}\right)\vec{e_z}\right)$$

$$= \frac{k}{\mu\omega}\left(jkE_x\vec{e_x} + jkE_y\vec{e_y}\right) = \frac{jk^2}{\mu\omega}\vec{E}$$

d'autre part : $\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \varepsilon\left(j\omega\vec{E}\right) = j\varepsilon\omega\vec{E}$

o a : $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Longrightarrow \frac{jk^2}{\mu\omega}\vec{E} = j\varepsilon\omega\vec{E} \Longrightarrow \frac{k^2}{\omega^2} = \varepsilon\mu$ ou bien $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$

4. $\vec{E}.\vec{H} = E_xH_x + E_yH_y + E_zH_z = \left(\frac{k}{\mu\omega}\right)(-E_xE_y + E_yE_x) + 0 = 0 \Longrightarrow \vec{E}\perp\vec{H}$

$$\vec{E}\times\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ E_x & E_y & 0 \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{k}{\mu\omega}\begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ E_x & E_y & 0 \\ -E_y & E_x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{k}{\mu\omega}\left(E_x^2 + E_y^2\right)\vec{e_z} = \frac{k}{\mu\omega}E^2\vec{e_z} = HE\vec{e_z}$$

On a $\vec{E}\times\vec{H} = \frac{k}{\mu\omega}E^2\vec{e_z} \Longrightarrow EH = \frac{k}{\mu\omega}E^2 \Longleftrightarrow H = \frac{k}{\mu\omega}E = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\mu\omega}E = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E$

Dans le domaine optique $\mu = 1$ et $\sqrt{\varepsilon} = n$ donc $H = nE$

$$\vec{k}\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 0 & 0 & k \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = -kE_y\vec{e_x} + kE_x\vec{e_y} = k\left(-E_y\vec{e_x} + E_x\vec{e_y}\right) = \mu\omega\vec{H}$$