Guide d'ondes plans

Exercices corrigés

Exercice 1 *Un guide d'onde plan symétrique d'indice $n = 3.4$ et d'épaisseur $h = 3\,\mu\text{m}$ plongé dans un milieu homogène d'indice $n_1 = 1.6$, la valeur critique de β est $\beta_c = kn_1$*

1. *Déterminer la valeur critique de la différence d'indice Δn.*
2. *Calculer cette valeur pour les modes TE_0 et TE_1 en utilisant la lumière de longueur d'onde $\lambda = 1.15\,\mu\text{m}$*

Solution 1

L'équation caractéristique du guide symétrique s'écrit :

$$hq = 2\arctan\left(\frac{p}{q}\right) + m\pi$$

avec $p = \sqrt{\beta^2 - k^2n_1^2}$, $q = \sqrt{k^2n^2 - \beta^2}$

1. à la valeur critique de $\beta = kn_1$ on aura $p = 0 \Longrightarrow hq = m\pi$

   d'autre part : $q = \sqrt{k^2n^2 - \beta^2} \Longrightarrow h^2\left(k^2n^2 - \beta_c^2\right) = h^2k^2\left(n^2 - n_1^2\right) = m^2\pi^2$

   $\Longrightarrow (n - n_1)(n + n_1) = \Delta n\,(n + n_1) = \dfrac{m^2\pi^2}{h^2k^2} = \dfrac{m^2\lambda^2}{4h^2}$

   soit

   $$\Delta n \geq \Delta n|_c = \frac{m^2\lambda^2}{4h^2\,(n + n_1)}$$

   $i)$ si $n >> n \Longrightarrow n + n_1 \approx n$ alors $\Delta n_c = \dfrac{m^2\lambda^2}{4h^2n}$

   $ii)$ si $n \approx n_1 \Longrightarrow n + n_1 \approx 2n$ alors $\Delta n_c = \dfrac{m^2\lambda^2}{8h^2n}$

2. Pour le mode TE_0 $m = 0 \Longrightarrow \Delta n_c = 0$ pas de limite pour Δn ;

   Pour le mode TE_1 : $\Delta n_c = \dfrac{(1.15)^2}{4\,(3)^2\,(3.4 + 1)} = 8.349\,1 \times 10^{-3}$

Exercice 2 *On réalise un guide d'onde plan à partir d'une couche de InGaAs d'indice de réfraction $n = 3.9$ et d'épaisseur $h = 1\,\mu\text{m}$, prise en sandwich entre deux couches d'AlGaAs d'indice de réfraction $n_1 = 3$, le guide est de largeur $d = 2\,\mu\text{m}$ et de longueur $\ell = 2\,\text{cm}$. La puissance optique injectée dans le guide est $P = 10$ mW avec une longueur d'onde $\lambda = 0.9\,\mu\text{m}$*

1. *Calculer la puissance guidée par unité de surface.*
2. *Démontrer que la constante de propagation du mode TE_m s'exprime par la formule pratique : $\beta = \pi\sqrt{75.11 - (m+1)^2}$.*
   En déduire les angles de propagation des modes TE_0 et TE_1.
3. *Calculer l'ouverture numérique du guide et en déduire le nombre maximal des modes guidés.*

4. *Calculer l'angle critique de réflexion totale interne*
5. *Calculer les constantes et les angles de propagation des modes TE_4 et TE_5, que remarquez-vous.*
6. *Calculer l'épaisseur effective h^* du guide pour les modes $TE_0, TE_1, TE_2, TE_3, TE_4$ et TE_5*
   Tracer approximativement une courbe représentant la variation de h^* en fonction de l'ordre des modes m
7. *Si l'atténuation linéique totale dans le guide est de $\alpha = 0.001$ dB/cm. Calculer la puissance optique sortie.*

Solution 2

1. La puissance optique guidée par unité de surface est
$P_S = \dfrac{P}{S} = \dfrac{P}{h \times d} = \dfrac{10^{-2}}{10^{-6} \times 2 \times 10^{-6}} = 5 \times 10^9\ \mathrm{W/m^2}$
2. La relation de quantification de s'écrit :

$$\beta = \sqrt{k^2 n^2 - \frac{(m+1)^2 \pi^2}{h^2}} = \pi \sqrt{\frac{4n^2}{\lambda^2} - \frac{(m+1)^2}{h^2}} = \pi \sqrt{75.11 - (m+1)^2}$$

$\beta_m = kn \sin\theta_m \Longrightarrow \theta_m = \arcsin \dfrac{\beta_m}{kn}$; $kn = \dfrac{2\pi n}{\lambda} = \dfrac{2\pi \times 3.9}{0.9} = 27.227$

Pour TE_0 : $m = 0$; $\beta_0 = \pi\sqrt{75.11 - 1} = 27.045$

$\Longrightarrow \theta_0 = \arcsin \dfrac{27.045}{27.227} = \arcsin(0.993) = 83.37\,^\circ$

Pour TE_1 : $m = 1$; $\beta_1 = \pi\sqrt{75.11 - 4} = 26.492$

$\Longrightarrow \theta_1 = \arcsin \dfrac{26.492}{27.227} = \arcsin(0.973) = 76.65\,^\circ$

$ON = \sqrt{n^2 - n_1^2} = \sqrt{(3.9)^2 - 9} = 2.492$

$M = \dfrac{2h}{\lambda}(ON) = \dfrac{2 \times 1}{0.9} \times 2.492 = 5.5378 \approx 5$ modes

3. $\theta_\ell = \arcsin \dfrac{n_1}{n} = \arcsin\left(\dfrac{3}{3.9}\right) = 50.28$

4. $\beta_4 = \pi\sqrt{75.11 - 25} = 22.23 \Longrightarrow \theta_4 = \arcsin \dfrac{22.23}{27.227} = 54.78\,^\circ$

$\beta_5 = \pi\sqrt{75.11 - 36} = 19.647 \Longrightarrow \theta_5 = \arcsin \dfrac{19.647}{27.227} = 46.165\,^\circ$

On remarque que $\beta_5 < kn_1$ et $\beta_4 > kn_1$ et $\theta_5 < \theta_\ell$ et $\theta_4 > \theta_\ell$ alors le mode TE_4 est celui de plus grand ordre des modes guidés.

Le mode TE_5 est un mode radiatif dans le milieu n_1.

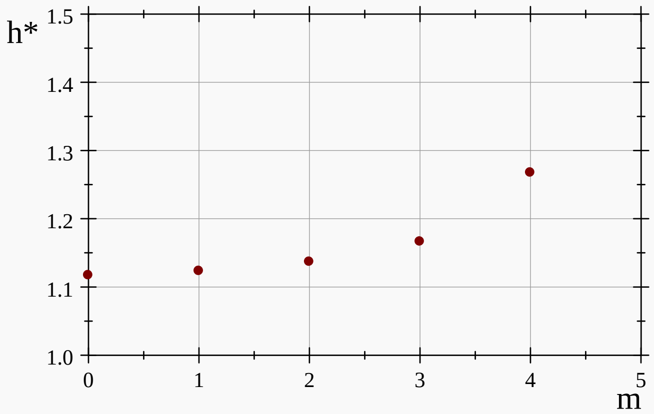
L'épaisseur effective est donnée par $h^* = h + x_1 + x_2$, dans notre cas $x_1 = x_2 = x_m$ pour le mode d'ordre m

$x_m = \dfrac{1}{\sqrt{\beta_m^2 - k^2 n_1^2}}$ $\quad TE_m \Longrightarrow h_m^* = h + 2x_m = 1 + \dfrac{2}{\pi\sqrt{30.667 - (m+1)^2}}$

$h_0^* = 1 + \dfrac{2}{\pi\sqrt{30.667 - (0+1)^2}} = \dfrac{0.36719}{\pi} + 1 = 1.1169$

$h_1^* = 1.1233\,\mu\mathrm{m}^{-1}$, $h_2^* = 1.1368$, $h_3^* = 1.1662$, $h_4^* = 1.2674$

pour $m = 5$: $h_5^* = 1 + \dfrac{2}{\pi\sqrt{30.667 - (5+1)^2}} = 1.0 - 0.27567j$

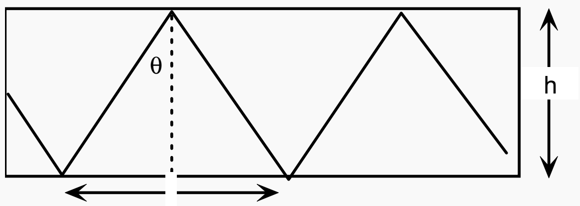


Exercice 3 *On fabrique un guide d'onde plan d'indice de réfraction $n = 2.6$ et d'épaisseur $h = 100\,\mu$m . La couche coeur est limitée par deux milieux semi-infinis d'indices $n_1 = 1$ et $n_2 = 2$. Un faisceau laser de longueur d'onde $\lambda = 1.06\,\mu$m est injecté dans le guide pour exciter les modes TE_m .*

1. *Combien des modes peut-on exciter dans tel guide ?.*
2. *Si le mode d'ordre m se propage avec une constante de propagation $\beta = 14.48\ \ \mu\text{m}^{-1}$ combien des réflexions subit tel mode sur le trajet de 1 cm.*
3. *Calculer la valeur de l'épaisseur effective h^* pour tel mode. En déduire les valeurs de décalage de Goos-Heanchen sur les deux interfaces .*

Solution 3

1. $M = \dfrac{2h}{\lambda}\sqrt{n^2 - n_2^2} = \dfrac{200}{1.06}\sqrt{(2.6)^2 - 4} = 313.46 \approx 313$ modes



2. $\beta = 14.48\ \ \mu\text{m}^{-1} = kn\sin\theta \Longrightarrow \sin\theta = \dfrac{\beta}{kn} = \dfrac{\beta\lambda}{2\pi n} = \dfrac{14.48 \times 1.06}{2\pi \times 2.6} = 0.939\,56$

$\theta = \arcsin(0.939\,56) = \quad \text{rad} = 69\,°.975$

$\tan\theta = \tan(69.975\,°) = 2.743\,8$

si on suppose que le mode travers la distance longitudinale ℓ par une réflexion sur une interface alors :

$\tan\theta = \dfrac{\ell/2}{h} \Longrightarrow \ell = 2h\tan\theta$

donc $N = \dfrac{1}{\ell} = \dfrac{1}{2h\tan\theta} = \dfrac{1}{2 \times 100 \times 10^{-4} \times 2.743\,8} \approx 18$

3. $h^* = h + \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{r}$

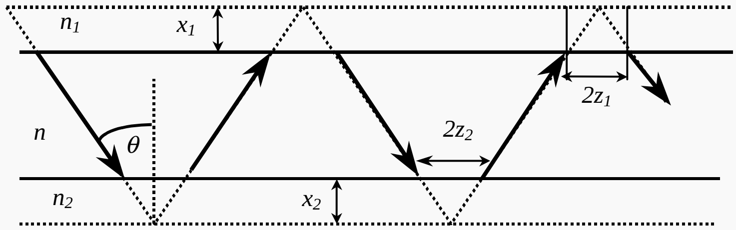
$p = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_1^2} = \sqrt{(14.48)^2 - \left(\dfrac{2\pi \times 1}{1.06}\right)^2} = 13.211\,\mu\text{m}^{-1}$

$\Longrightarrow x_1 = \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{13.211} = 7.569\,4 \times 10^{-2}\,\mu\text{m}$

$r = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_2^2} = \sqrt{(14.48)^2 - \left(\dfrac{2\pi \times 2}{1.06}\right)^2} = 8.314\,3\,\mu\text{m}^{-1}$

$x_2 = \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{8.314\,3} = 0.120\,27\,\mu\text{m}$

$h^* = 100 + 7.569\,4 \times 10^{-2} + 0.120\,27 = 100.20$



$z_1 = x_1 \tan\theta = 7.5694 \times 10^{-2} \times 2.7438 = 0.20769\,\mu\text{m}$
$z_2 = x_2 \tan\theta = 0.12027 \times 2.7438 = 0.33000\,\mu\text{m}$

Exercice 4 *On considère un guide d'onde plan, d'indice $n = 1,43$, d'épaisseur $h = 10\,\mu\text{m}$ limité par deux milieu semi infinis d'indice $n_1 = n_2 = 1,41$ dans lequel se propagent les modes TE_m de longueur d'onde $\lambda = 0,9\,\mu\text{m}$*

1. *Décrire le principe de propagation de la lumière dans ce guide.*
2. *Démontrer que la constante de propagation β ne peut prendre que des valeurs discrètes et donner l'expression de β en fonction de λ, n, h et en déduire les valeurs quantifiées de l'angle de propagation du mode TE_m.*
3. *Calculer les valeurs numériques de β_0, β_1, θ_0, θ_1*
4. *Déduire le nombre maximal des modes guidés.*
5. *Que doit être l'épaisseur de la couche coeur pour avoir un mode unique.*
6. *Quelle longueur d'onde faut-il utiliser avec l'épaisseur $h = 4\,\mu\text{m}$ pour considérer le guide comme monomode ?*
7. *De combien se pénètre le mode TE_1 dans le milieu n_1 par l'effet de Goss-Henchen.*
   En déduire la valeur de décalage des rayons incidents et réfléchis et l'épaisseur effective du guide.

Solution 4

$n = 1.43$, $h = 10\,\mu\text{m}$, $n_1 = n_2 = 1.41$ et $\lambda = 0.9\,\mu\text{m}$

1. Les ondes incidentes sur les deuc inetrfaces $(n \to n_1)$ subissent des réflexions internes totales si l'angle d'incidence $\theta > \theta_\ell$, où θ est l'angle limite ; $\sin\theta_\ell = \dfrac{1.41}{1.43} = 0.98601 \Longrightarrow \theta_\ell = \arcsin(0.98601) = 1.4033\,\text{rad} = 80.403\,°$ c'est-à-dire si la constante de propagation vérifie la condition

$$kn_1 < \beta < kn$$

2. L'onde se propage le long du guide suivant l'axe oz et que $x = 0$ sur l'interface $n - n_1$et $x = -h$ sur l'interface $n - n_2$. L'onde A subit deux réflexions en $x = 0$ et $x = -h$ pour arriver en A' . Chaque fois la réflexion interne totale introduit un déphasage de $-\pi$; de plus la différence de marche optique entre les deux ondes A et A' est $2hn\cos\theta$ ce qui entraîne une différence de phase de $2khn\cos\theta$ .Une condition nécessaire de guidage c'est que les ondes A et $A\prime$ soient en phase donc :

$$2khn\cos\theta - 2\pi = 2m\pi \qquad m = 0, 1, 2, 3, ... \tag{1.1}$$

ou bien :

$$qh = (m+1)\pi \tag{1.2}$$

où $q = kn\cos\theta$ représente le nombre d'onde transverse. Avec $\beta = kn\sin\theta$ on remarque que kn, q et β sont lier géométriquement par la relation : $q^2 + \beta^2 = k^2n^2$
En substituant dans (2) on trouve :

$$\beta = \sqrt{k^2n^2 - (m+1)^2\frac{\pi^2}{h^2}} = \pi\sqrt{\frac{4n^2}{\lambda^2} - \frac{(m+1)^2}{h^2}} \tag{1.3}$$

C'est la condition de quantification de la constante de propagation qui démontre que la constante de propagation ne peut prendre que des valeurs discrètes : β_m et il y en a un nombre limité des modes guidés.

$qh = (m+1)\pi \Longrightarrow knh\cos\theta_m = (m+1)\,\pi \Longrightarrow \cos\theta_m = \dfrac{m+1}{2nh}\lambda$

3. $\beta_m = \sqrt{\dfrac{4\pi^2 n^2}{\lambda^2} - (m+1)^2\,\dfrac{\pi^2}{h^2}}$

$\beta_0 = \sqrt{\dfrac{4\pi^2 n^2}{\lambda^2} - \dfrac{\pi^2}{h^2}} = \sqrt{\dfrac{4\pi^2\,(1.43)^2}{(0.9)^2} - \dfrac{\pi^2}{(10)^2}} = 3.176\,2\pi = 9.978\,3\,\mu\text{m}^{-1}$

$\cos\theta_0 = \dfrac{\lambda}{2nh} = \dfrac{0.9}{2\times 1.43\times 10} = 3.146\,9\times 10^{-2}$

$\Longrightarrow \theta_0 = \arccos\left(3.146\,9\times 10^{-2}\right) = 1.539\,3\,\text{rad} = 88.195\,^\circ$

$\beta_1 = \sqrt{\dfrac{4\pi^2\,(1.43)^2}{(0.9)^2} - \dfrac{4\pi^2}{(10)^2}} = 3.171\,5\pi = 9.963\,6\,\mu\text{m}^{-1}$

$\cos\theta_1 = \dfrac{2\lambda}{2nh} = \dfrac{0.9}{1.43\times 10} = 6.293\,7\times 10^{-2}$

$\Longrightarrow \theta_1 = \arccos\left(6.293\,7\times 10^{-2}\right) = 1.507\,8\,\text{rad} = 86.391\,^\circ$

4. $M = \dfrac{2h}{\lambda}\sqrt{n^2 - n_2^2} = \dfrac{2\times 10}{0.9}\sqrt{(1.43)^2 - (1.41)^2} = 5.296\,2 \approx 5$ modes

5. Le guide est monomode si $M = \dfrac{2h}{\lambda}\sqrt{n^2 - n_2^2} = 1$

$\Longrightarrow h = \dfrac{\lambda}{2\sqrt{n^2 - n_2^2}} = \dfrac{0.9}{2\sqrt{(1.43)^2 - (1.41)^2}} = 1.888\,2\,\mu\text{m}$

$x_1 = \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{\sqrt{\beta_1^2 - k^2 n_1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{(9.963\,6)^2 - \left(\dfrac{2\pi\times 1.41}{0.9}\right)^2}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{99.273 - 9.817\,8\pi^2}} = 0.648\,86\,\mu\text{m}$

Exercice 5 *On considère un guide d'onde plan, d'indice $n = 1.5$, d'épaisseur $h = 20\,\mu\text{m}$ limité par deux milieux semi infinis d'indices $n_1 = 1.4$ et $n_2 = 1,44$ dans lequel se propagent les modes TE_m de longueur d'onde $\lambda = 1.3\,\mu\text{m}$*

1. *Décrire le principe de propagation de la lumière dans ce guide.*
2. *La lumière est injectée du côté du milieu n_1 vers le guide sous l'incidence α_0. Pour quelles valeurs de α_0 on aura des modes guidés.*
3. *En tenant compte des réflexions sur les interfaces $n_1 \div n$ et $n \div n_2$ Etudier les structures des champs des modes TE_m et donner en particulier l'allure des modes TE_0, TE_1 et TE_2.*
4. *Démontrer que la constante de propagation β_m du mode TE_m est une grandeur quantifié. Calculer $\beta_0, \beta_1, \beta_2$.*
5. *Déduire une expression pratique permettant de calculer le nombre des modes guidés.Que doit être l'épaisseur de la couche coeur pour avoir un mode unique.*
6. *De combien se pénètre le mode TE_1 dans le milieu n_1 par l'effet de Goss-Henchen. En déduire la valeur de décalage des rayons incidents et réfléchis et l'épaisseur effective du guide.*

Solution 5

$n = 1.5$, $h = 20\,\mu\text{m}, \lambda = 1.3\,\mu\text{m}, n_1 = 1.4$ et $n_2 = 1.44$

1. Question de cours : condition de propagation

2. L'angle d'incidence est α_0 alors que l'angle de transmission dans n sera α tel que : $n_1\sin\alpha_0 = n\sin\alpha$

On aura de la reflexion totale dans n si $\alpha > \theta_\ell$ c'est-à-dire si $\sin\alpha > \sin\theta_\ell = \dfrac{n_2}{n}$ donc il faut que

$\sin\alpha = \dfrac{n_1\sin\alpha_0}{n} > \dfrac{n_2}{n} \Longrightarrow \sin\alpha_0 > \dfrac{n_2}{n_1} = \dfrac{1.44}{1.4} = 1.028\,6$

ce qui est impossible donc on ne peut pas injecter l'onde du côté de n_1 pour avoir des modes guidés.

3. Cours : structures des modes

4. Cours : démonstration de la formule : $\beta_m = \sqrt{k^2 n^2 - (m+1)^2 \dfrac{\pi^2}{h^2}}$

$$\beta_m = \sqrt{k^2 n^2 - (m+1)^2 \frac{\pi^2}{h^2}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 n^2}{\lambda^2} - (m+1)^2 \frac{\pi^2}{h^2}} = \pi \sqrt{\frac{36}{4 \times (1.3)^2} - \frac{(m+1)^2}{400}}$$

$$\beta_0 = \pi \sqrt{\frac{36}{4 \times (1.3)^2} - \frac{(0+1)^2}{400}} = 7.2481$$

$$\beta_1 = \pi \sqrt{\frac{36}{4 \times (1.3)^2} - \frac{(1+1)^2}{400}} = 7.243$$

$$\beta_2 = \pi \sqrt{\frac{36}{4 \times (1.3)^2} - \frac{(2+1)^2}{400}} = 7.2345$$

5. $M = \dfrac{2h}{\lambda} \sqrt{n^2 - n_2^2} = \dfrac{2 \times 20}{1.3} \sqrt{(1.5)^2 - (1.44)^2} = 12$

Le guide est monomode si $M = 1$

$$\longrightarrow h_c = \frac{\lambda}{2\sqrt{n^2 - n_2^2}} = \frac{1.3}{2\sqrt{(1.5)^2 - (1.44)^2}} = 1.5476\,\mu\text{m}$$

$$x_1 = \frac{1}{p} = \frac{1}{\sqrt{\beta_1^2 - k^2 n_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{(7.243)^2 - \dfrac{4\pi^2 (1.4)^2}{(1.3)^2}}} = 0.38704\,\mu\text{m}$$

$$x_2 = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\beta_1^2 - k^2 n_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{(7.243)^2 - \dfrac{4\pi^2 (1.44)^2}{(1.3)^2}}} = 0.49865\,\mu\text{m}$$

$z_1 = x_1 \tan \theta_1$;

$$\beta_1 = kn \sin \theta_1 \Longrightarrow \sin \theta_1 = \frac{\beta_1}{kn} = \frac{\beta_1 \lambda}{2\pi n} = \frac{7.243 \times 1.3}{2\pi \times 1.5}$$
$$= \frac{3.1386}{\pi} = 0.99905\,\text{rad} = 57.241\,^\circ$$

$z_1 = (0.38704) \times \tan(57.241\,^\circ) = 0.60151\,\mu\text{m}$

$h^* = h + x_1 + x_2 = 20 + 0.38704 + 0.49865 = 20.886\,\mu\text{m}$

Exercice 6 *Un guide d'onde est constitué d'un milieu d'indice $n = 1.8$ d'epaisseur $h = 50\,\mu\text{m}$ et limité par deux milieux semi infinis d'indices $n_1 = 1,40$ et $n_2 = 1,42$. Une section rectangulaire est dans le plan xoz et l'onde se propage, en Zig-Zag suivant l'axe oz et on désigne par β la constante de propagation longitudinale.*

1. *Donner l'équation de propagation d'onde dans chaque région et discuter, en fonction de β, les conditions de propagation des modes dans tel guide d'onde.*
2. *Démontrer que β ne peut prendre que de valeurs discrètes et déduir la valeur critique de la longueur d'onde.*
3. *Expliquer le phénomène de Goss-Heanchen dans le guide d'onde et en utilisant les formules de Fresnel démontrer que le décalage $z_i = \dfrac{\lambda}{2\pi n \cos\theta} \dfrac{\partial \delta_i}{\partial \theta}$ sur l'interface $(n - n_i)_{i=1,2}$ s'exprime : $z_i = \dfrac{\tan\theta}{k\sqrt{n^2 \sin^2\theta - n_i^2}}$ avec $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ et δ_i est la différence de phase entre l'onde incidente et l'onde réflechie.*
4. *Calculer l'épaisseur effective du guide pour le mode TE_1 en utilisant la lumière monochromatique de longeur d'onde $\lambda = 1.13\ \mu$m.*

Solution 6

$n = 1,8$, $h = 50\ \mu m$ $n_1 = 1,40$; $n_2 = 1,42$, $\lambda = 1.13\mu m$

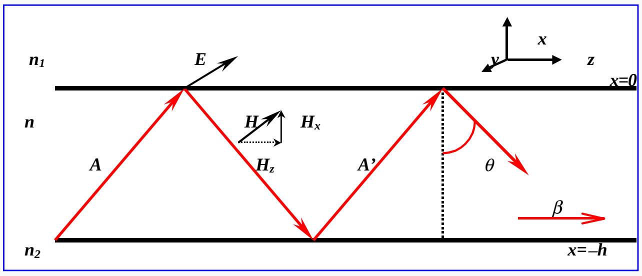
1. Le mode du guide d'onde est la solution de l'équation de propagation d'onde de Maxwell qui l'on écrit dans le mileu d'indice n_i :

$$\overrightarrow{\nabla}^2 E + k^2 n_i^2 E = 0$$

où $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$. La solution de cette équation vérifie les conditions de continuité des composantes tangentielles et normales des vecteurs du champ électromagnétique sur les interfaces $n - n_1$ et $n - n_2$. Dans notre cas l'onde se propage le long de l'axe oz, on cherchera alors une solution de la forme : $E(r,t) = E(x,y).exp(j(\omega t - \beta z))$ qui verifie l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \left(k^2 n_i^2 - \beta^2\right) E = 0$$

Cette équation démontre que les modes sont guidés lorsque la constante de propagation est telle que $kn_1 < \beta < kn$.



2. L'onde se propage le long du guide suivant l'axe oz et que $x = 0$ sur l'interface $n - n_1$et $x = -h$ sur l'interface $n - n_2$. L'onde A subit deux réflexions en $x = 0$ et $x = -h$ pour arriver en A' . Chaque fois la réflexion interne totale introduit un déphasage de $-\pi$; de plus la différence de marche optique entre les deux ondes A et A' est $2hn\cos\theta$ ce qui entraîne une différence de phase de $2khn\cos\theta$ .Une condition nécessaire de guidage c'est que les ondes A et A' soient en phase donc :

$$2khn\cos\theta - 2\pi = 2m\pi \qquad m = 0, 1, 2, 3, ... \tag{1.4}$$

ou bien :

$$qh = (m+1)\pi \tag{1.5}$$

où $q = kn\cos\theta$ représente le nombre d'onde transverse. Avec $\beta = kn\sin\theta$ on remarque que kn, q et β sont lier géométriquement par la relation : $q^2 + \beta^2 = k^2n^2$

En substituant dans (2) on trouve :

$$\beta = \sqrt{k^2n^2 - (m+1)^2\frac{\pi^2}{h^2}} = \pi\sqrt{\frac{4n^2}{\lambda^2} - \frac{(m+1)^2}{h^2}} \tag{1.6}$$

C'est la condition de quantification de la constante de propagation qui démontre que la constante de propagation ne peut prendre que des valeurs discrètes : β_m et il y en a un nombre limité des modes guidés.

β_m doit être réel $\Rightarrow$ $\dfrac{4n^2}{\lambda^2} - \dfrac{(m+1)^2}{h^2} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{2n}{\lambda} \geq \dfrac{m+1}{h} \Rightarrow \lambda \leq \lambda_c = \dfrac{2hn}{m+1}$

3. Le décalage de Goss-Heanchen résulte du fait que la lumière incidente n'est rigoureusement monochromatique mais c'est une superposition de plusieurs ondes planes élémentaires dont les angles d'incidence sont écartés de $\Delta\theta$ très faibles. D'après les formules de Fresnel la variation de phase dépend de l'angle de propagation et par suites les chemins optiques se diffèrent.

4. Sur l'interface $(n-n_1)$: $z_1 = \dfrac{\lambda}{2\pi n\cos\theta}\dfrac{\partial\delta_1}{\partial\theta}$
Le coefficient de réflection sur cette interface est donnée par la formule de Fresnel pour les modes TE dans le cas où θ est plus grand que l'angle limite :

$$r_\perp = \frac{n\cos\theta - n_1\cos\theta_1}{n\cos\theta + n_1\cos\theta_1} = \frac{n\cos\theta - n_1\sqrt{1-\sin^2\theta_1}}{n\cos\theta + n_1\sqrt{1-\sin^2\theta_1}}$$

$$= \frac{n\cos\theta - \sqrt{n_1^2 - n^2\sin^2\theta}}{n\cos\theta + \sqrt{n_1^2 - n^2\sin^2\theta}} = \frac{n\cos\theta - j\sqrt{n^2\sin^2\theta - n_1^2}}{n\cos\theta + j\sqrt{n^2\sin^2\theta - n_1^2}} = \exp\left(-2j\delta_1\right)$$

avec $\delta_1 = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{n^2\sin^2\theta - n_1^2}}{n\cos\theta}\right)$

$$\frac{\partial\delta_1}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{n^2\sin^2\theta - n_1^2}}{n\cos\theta}\right)\right) = \frac{n\sin\theta}{\sqrt{n^2\sin^2\theta - n_1^2}}$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{\lambda}{2\pi n\cos\theta}\frac{\partial\delta_1}{\partial\theta} = \frac{\lambda}{2\pi n\cos\theta}\frac{n\sin\theta}{\sqrt{n^2\sin^2\theta - n_1^2}} = \frac{\tan\theta}{k\sqrt{n^2\sin^2\theta - n_1^2}}$$

et de même sur l'interface $n-n_2$: $z_2 = \dfrac{\tan\theta}{k\sqrt{n^2\sin^2\theta - n_2^2}}$

5. La constante de propagation du mode TE_1 est :

$$\beta_1 = \sqrt{k^2n^2 - (1+1)^2\frac{\pi^2}{h^2}} = \sqrt{k^2n^2 - 4\frac{\pi^2}{h^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{n^2}{\lambda^2} - \frac{1}{h^2}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{1.8^2}{1.13^2} - \frac{1}{50^2}} = 3.1856\pi = 10.008\ \mu m^{-1}$$

$$\beta_1 = kn\sin\theta_1 \Rightarrow \sin\theta_1 = \frac{\lambda\beta_1}{2\pi n} = \frac{1.13\times 3.1856\pi}{2\times\pi\times 1.8} = 0.99992$$

$$x_1 = \frac{z_1}{\tan\theta} = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{n^2\sin^2\theta - n_1^2}} = \frac{1.13}{2\pi\sqrt{(1.8\times 0.99992)^2 - (1.4)^2}} = 0.15899$$

$$x_2 = \frac{z_2}{\tan\theta} = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{n^2\sin^2\theta - n_2^2}} = \frac{1.13}{2\pi\sqrt{(1.8\times 0.99992)^2 - (1.42)^2}} = 0.16262$$

et l'épaisseur éffective est : $h^* = h + x_1 + x_2 = 50 + 0.15899 + 0.16262 = 50.322\ \mu m$.