Fibres optiques

Exercice 1

Le rayon du coeur d'une fibre optique à saut d'indice est $a = 80\mu m$, l'indice du coeur est $n_1 = 1.5$ et la différence relative des indices est $\Delta = 1.5\%$; en utilisant la longueur d'onde $\lambda = 1\mu m$

1. Calculer l'épaisseur normalisée $(V = kaON)$ et le nombre des modes guidées
2. Calculer l'ouverture numérique et l'angle d'acceptance α_c du coté de l'air.

Solution 1 : $\Delta = 1.5\%$ et $n_1 = 1.5$

1. $V = kan_1\sqrt{2\Delta} = 130.59 \qquad M = 8527$
2. $ON = n_1\sqrt{2\Delta} = 0.25981$
   $\alpha_c = 0.26283\,\text{rad} = 15.059\,^\circ$

Exercice 2

On considère une fibre optique à profil d'indice parabolique, de diamètre du coeur $2a = 50\mu m$ et d'ouverture numérique $ON = 0.2$

1. Calculer le nombre des modes guidés dans la fibre pour la longueur d'onde $\lambda = 1\mu m$.
2. Quel doit être le diamètre du coeur pour que l'épaisseur normalisée soit $V = 3.4$
3. Calculer la période de la trajectoire sinusoïdale si le profile d'indice est donné par :

$$n(r) = \frac{3}{2}\sqrt{1 - 2\Delta\frac{r^2}{a^2}}$$

   où Δ est la différence relative des indices
4. Calculer le nombre des points de focalisation par unité de longueur.

Solution 2 : $ON = 0.2$

1. $M = \dfrac{V^2}{2}\dfrac{\alpha}{\alpha+2} = 246.74 \simeq 247$ modes
2. $a = \dfrac{V}{kON} = 2.7056\ \mu m$
3. $g = \dfrac{2\pi}{L_f} = \dfrac{\sqrt{2\Delta}}{a} \Longrightarrow L_f = \dfrac{2\pi a}{\sqrt{2\Delta}} = 1.1781\ mm$
4. $N_f = \dfrac{2}{L_f} = \dfrac{2}{1.1781 \times 10^{-3}} = 1697$

Exercice 3

Déterminer la vitesse de la lumière dans une fibre optique à saut d'indice, d'angle d'acceptance $\alpha_c = 0.2\ rd$ et de différence relative des indices $\Delta = 0.9\%$. Calculer l'indice de gaine.

Solution 3 : $ON = \sin\alpha_c = \sin(0.2) = 0.198\,67$

$\Delta = \dfrac{ON^2}{2n_1^2} \Longrightarrow n_1 = \dfrac{ON}{\sqrt{2\Delta}} = 1.480\,8$

$v = \dfrac{c}{n} = 2.025\,9 \times 10^8$ m/s

L'indice de gaine est $n_2 = 1.47$

Exercice 4

Calculer l'ouverture numérique et l'angle d'acceptance d'une fibre optique si la lumière se propage dans la fibre avec une vitesse de $2,01 \times 10^8 m/s$ et l'angle limite de propagation est $80\,°$

Solution 4 : $n_1 = \dfrac{c}{v} = \dfrac{3}{2.01} = 1.492\,5$

$n_2 = n_1 \sin\theta_\ell = 1.4925 \times \sin(80\,°) = 1.469\,8$

$ON = 0.259\,31 \qquad \Delta = 1.5\,\%$

Exercice 5

La puissance optique injectée dans une fibre optique, de 8 km de longueur, est de 120 mW ; à la sortie on aura $3mW$.

1. Calculer l'atténuation linéique totale.
2. Si l'atténuation est égale à $1dB/km$; quelle doit être la puissance injectée pour avoir à la sortie 3mW.

Solution 5 : $L = 8$ km, $P_0 = 120$ mW et $P_1 = 3mW$

1. $\alpha_{dB/km} = \dfrac{10}{L}\log_{10}\left(\dfrac{P_1}{P_0}\right) = -2.002\,6$ dB/km
2. $P_0 = P_1 10^{\frac{\alpha L}{10}} = 3 \times 10^{8/10} = 18.929$ mW

Exercice 6

Dans une fibre optique à saut d'indice, de longueur 2 km l'indice de réfraction varie avec la longueur d'onde suivant la loi : $n(\lambda) = \alpha - \beta\lambda^2$.

1. Calculer en fonction de α, β et λ l'indice de groupe
2. Déterminer le temps de transit et le paramètre de dispersion chromatique.

Solution 6 : $L = 2$ km

1. $N_g = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} = \left(\alpha - \beta\lambda^2\right) - \lambda \frac{d\left(\alpha - \beta\lambda^2\right)}{d\lambda} = \alpha + \beta\lambda^2$
2. $M_d = -\frac{\lambda}{c}\frac{d^2n}{d\lambda^2} = -\frac{\lambda}{c}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left(\alpha - \beta\lambda^2\right) = \frac{2\lambda\beta}{c}$

   Le temps de transit est celui du groupe d'onde $\tau_g = \frac{L}{v_g} = \frac{LN_g}{c} = \frac{L}{c}\left(\alpha + \beta\lambda^2\right)$

Exercice 7

On considère une fibre optique de longueur 5 km, d'indices : de gaine $n_2 = 1.4$, et du coeur :

$$n(r) = \frac{3}{2}\sqrt{1 - 2\Delta\left(\frac{r}{a}\right)^\alpha}$$

1. Pour $\alpha = \infty$, $a = 60\mu m$, calculer l'ouverture numérique, l'angle d'acceptance, l'angle limite de propagation et le nombre maximale des modes guidés avec la longueur d'onde $\lambda = 1,3\mu m$.
2. Calculer le nombre des modes guidés avec la même lumière mais pour $\alpha = 2$. Calculer la constante de focalisation
3. L'atténuation totale dans la fibre est 0.8 dB/km, quelle puissance optique faut-il injecter à l'entrée si la photodiode de sortie fonctionne à partir de 5 mW.

Solution 7 : $\alpha = \infty \Longrightarrow n(r) = n_1 = 1.5$

1. $ON = 0.538\,52 \Longrightarrow \alpha_c = 32.583\,°$

   $\theta_\ell = 68.961\,°$

   $M = \frac{V^2}{2}\frac{\alpha}{\alpha + 2} = 12194$
2. Pour $\alpha = 2$: $M' = \frac{V^2}{2}\frac{\alpha}{\alpha+2} = \frac{V^2}{4} = \frac{M}{2} = \frac{12194}{2} = 6097$

   $g = \frac{\sqrt{2\Delta}}{a}$

   $\Delta = \frac{ON^2}{2n_1^2} \Longrightarrow g = \frac{ON}{an_1} = \frac{0.538\,52}{60 \times 1.5} = 5.983\,6 \times 10^{-3}$
3. $\alpha_{dB/km} = \frac{10}{L}\log_{10}\left(\frac{P_s}{P_e}\right) \Longrightarrow P_e = P_s 10^{\frac{\alpha L}{10}} = 5 \times 10^{\frac{0.8 \times 5}{10}} = 12.559$ mW

Exercice 8

Dans un système de communication on utilise un laser à injection qui émis des impulsions de puissance moyenne $1mW$, de longueur d'onde $\lambda = 0.8\mu m$ et de largeur spectrale relative $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0.5\%$; une fibre à saut d'indice de rayon $a = 50\mu m$, d'indices $n_2 = 1.4$ $n_1 = 1.5$, de longueur 10 km et d'atténuation totale $\alpha_{dB} = 0.1 dB/km$; une photodiode.

1. De combien s'étale l'impulsion à la sortie de la fibre si $\left|\frac{d^2n}{d\lambda^2}\right| = 0,04\,\mu\text{m}^{-2}$

2. Calculer la valeur de la puissance optique réfléchie sur la face d'entrée de la fibre.
3. Calculer la puissance optique incidente sur la photodiode
4. Calculer la bande passante de la fibre.

Solution 8 : $\lambda = 0.8\ \mu m \Longrightarrow \Delta\lambda = \dfrac{0.5}{100} \times 0.8 = 0.004\,\mu\text{m}$

1. En négligenat la dispersion du guide, l'élargissement total est $\Delta\tau = \sqrt{\Delta t_n^2 + \Delta t_m^2}$ avecΔt_n est l'élargissement dû à la disperssion intermodal et $\Delta t_m =$ la disperssion chromatique. alors

$$\Delta t_n = \frac{L\,(ON)^2}{2cn_1} = \frac{10^4 \times \left(1.5^2 - 1.4^2\right)}{2 \times 3 \times 10^8 \times 1.5} = 3.222\ \times 10^{-6}\ \text{s}$$

$$\Delta t_m = \frac{\lambda}{c}\frac{d^2n}{d^2\lambda} L\Delta\lambda = \frac{0.8}{3 \times 10^8} \times 0.04 \times 10^4 \times 0.004 = 4.26 \times 10^{-9}\,\text{s}$$

$$\Delta\tau = \sqrt{(\Delta t_m)^2 + (\Delta t_m)^2} = 3.2225 \times 10^{-6}\,\text{s}$$

2. La puissance réfelechie à l'entrée de la fibre sous l'incidence normale est $P_r = RP_0$ avec R est le coeeficient de réflection de Fresnel

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 = \left(\frac{1.5 - 1}{1.5 + 1}\right)^2 = 0.04 \Longrightarrow P_r = 0.04 \times 1 = 0.04\ \text{mW}$$

3. La puissance injectée dans la fibre est
$P_i = (P_0 - P_r) = (1 - R)\,P_0 = 1 - 0.04 = 0.96\ \text{mW}$
La puissance incidente sur la photodiode est

$$P_f = P_i \times 10^{\frac{(-\alpha L)}{10}} = 0.96 \times 10^{\frac{(-0.1 \times 10)}{10}} = 0.76256\ mW$$

4. $B = \dfrac{1}{\Delta\tau} = \dfrac{1}{3.2225 \times 10^{-6}} = 3.1032 \times 10^5\,\text{Hz}$

Exercice 9

Soit une fibre optique à profil parabolique de l'indice de réfraction du coeur. Au voisinage de l'axe l'indice vaut $n_1 = 1.5$, l'indice de gaine est $n_2 = 1.35$ le diamètre du coeur est $2a = 90\mu m$.

1. Calculer les valeurs permises de l'angle d'injection de la lumière dans la fibre du coté de l'air et le nombre maximal des modes à $\lambda = 1.15\mu m$.
2. Calculer la période de focalisation des modes.
3. De combien s'étale l'impulsion lumineuse à la sortie, en négligeant les dispersions chromatiques.
4. Calculer l'atténuation globale par unité de longueur si la puissance de sortie est la moitié de puissance injectée à l'entrée.
5. Calculer la durée de transit d'un mode qui se propage au voisinage de l'axe dans la fibre de $10km$ de longueur.

Solution 9 $n_1 = 1.5, n_2 = 1.35, a = 45\ \mu m$

1. $ON = 0.65383 \Longrightarrow \alpha_c = \arcsin(0.65383) = \ 0.71264\,\text{rad} = 40.831\,^\circ$

$$M = \frac{V^2}{2}\frac{\alpha}{\alpha + 2} \simeq 6460\ \text{modes}$$

2. $L_f = \dfrac{2\pi a n_1}{ON} = 648.66\ \mu m$
3. La fibre est fortement multimode, la disperssion chromatique est négligée , donc la disperssion dominante est l'intermodale
   Sur une longueur de 1 km : $\Delta t_n = \dfrac{L\,(ON)^2}{2cn_1} = \dfrac{10^3 \times (0.653\,83)^2}{2 \times 3 \times 10^8 \times 1.5} = 4.75 \times 10^{-7}$ s
4. $\alpha_{dB/km} = 10 \log_{10}\left(\dfrac{P_s}{P_e}\right) = 10 \log_{10}(0.5) \simeq 3$ dB/ km
5. Au voisinage de l'axe l'indice est $n_1 = 1.5$ donc la vitesse est
   $v = \dfrac{c}{n_1} = \dfrac{3 \times 10^8}{1.5} = 2.0 \times 10^8 m/s$
   La durée de transit est $t = \dfrac{L}{v} = \dfrac{10 \times 10^3}{2 \times 10^8} = 5 \times 10^{-5}$ sec $= 0.5\ \mu$ sec

Exercice 10

On considère une fibre optique à saut d'indice de longueur $L = 10km$, l'indice du coeur est $n_1 = 1,5$ le rayon $a = 40\mu m$ et l'indice de gaine est $n_2 = 1,47$.

1. Calculer la valeur critique de l'angle d'incidence sur l'interface coeur-gaine, l'angle d'acceptance du coté de l'air et la vitesse de propagation des modes dans le coeur.
2. Estimer le nombre maximal des modes guidés pour la longueur d'onde $\lambda = 0,8\mu m$.
3. Estimer la valeur maximale du rayon de coeur pour que la fibre soit monomode.
4. Sachant que l'atténuation linéique dans la fibre est $0,15dB/km$ quelle puissance optique faut-il injecter à l'entrée pour avoir à la sortie une puissance $2mW$.
5. Calculer les valeurs de l'élargissement temporel dû à la dispersion intermodale et la dispersion chromatique sachant que le paramètre de dispersion chromatique est $M = 100ps.nm^{-1}.km^{-1}$ et la largeur spectrale relative $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = 1,6\%$.

Solution 10 : $L = 10$ km, $n_1 = 1.5$, $n_2 = 1.47$, $a = 40\mu m$

1. $\theta_\ell = \arcsin\left(\dfrac{n_2}{n_1}\right) = 78.524\,°$
   $ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = 0.298\,5 \Longrightarrow \alpha_c = \arcsin(ON) = 17.367\,°$
   La vitesse de Propagation de modes $v = \dfrac{c}{n_1} = 2.0 \times 10^8$ m/ s
2. $M = \dfrac{V^2}{2} = 4397$ modes
3. La fibre est monomode donc $M = 1$
   $\Longrightarrow a = \dfrac{\lambda}{\pi ON\sqrt{2}} = 0.603\,23\mu m$
4. $\alpha_{dB/km} = \dfrac{10}{L}\log_{10}\left(\dfrac{P_s}{P_e}\right) \Longrightarrow P_e = 2 \times 10^{\frac{\alpha L}{10}} = 2 \times 10^{\frac{0.15 \times 10}{10}} = 2.825\,1$ mW
5. $\Delta t_n = \dfrac{L\,(ON)^2}{2cn_1} = 9.900\,3 \times 10^{-7}$
   $\Delta t_m = ML\Delta\lambda = 12800$ ps $= 12.8 \times$ ns
   $\Delta t = \sqrt{\Delta t_n^2 + \Delta t_m^2} = 9.901\,1 \times 10^{-7}$ s

Exercice 11

On considère une fibre optique à saut d'indice, de rayon de coeur a, d'indices n_1 et n_2 et de longueur L. Les indices de groupe correspondants aux indices de réfraction sont N_1 et N_2 tels que :

$$\frac{N_1 - N_2}{N_1} \simeq \frac{n_1 - n_2}{n_1}$$

Le coefficient de dispersion Dm du matériau constituant le coeur est donné par :

$$D_m = A \ln \frac{\lambda}{B} \quad (\text{en } ps/nm.km)$$

A et B sont deux constantes données. Le coefficient de dispersion du guide est tel que :

$$D_g = \frac{1}{L}\frac{d\tau}{d\lambda} = -\frac{N_1 - N_2}{\lambda c}\frac{1,984}{V^2} \quad (en\ \mathrm{s\,m^{-2}})$$

où V est la fréquence normalisée $= ka(ON)$

1. Montrer que le coefficient D_g peut s'exprimer par la formule pratique :

$$D_g = -\frac{83,7\, N_1\lambda}{a^2 n_1^2}$$

en $ps/nm.km$ lorsque a et λ sont exprimés en μm On admet que $n_1 + n_2 \simeq 2n_1$.

2. Quel est la valeur du rayon de coeur de la fibre qui permet de compenser le coefficient de dispersion D_m par le coefficient de dispersion D_g pour finalement annuler le coefficient de dispersion globale :$D = D_g + D_m$.
3. Calculer les valeurs de D_m et D_g , ainsi que la valeur de dispersion intermodale D_n de la fibre pour $a = 2\,\mu$m.
4. Combien des modes peut-on guider dans cette fibre si son rayon de coeur est $a = 20\,\mu$m. ?

$A.N$: $n_1 = 1.447$ $\quad n_2 = 1.442$; $N_1 = 1.462$; $N_2 = 1.457$; $A = 145\ ps/km.nm$; $B = 1.35\mu m$; $L = 5km$; $\lambda = 1.6\mu m$.

Solution 11 :

1. On a $\frac{N_1 - N_2}{N_1} \simeq \frac{n_1 - n_2}{n_1} \Longrightarrow N_1 - N_2 \simeq N_1 \frac{n_1 - n_2}{n_1}$

$$\Longrightarrow D_g = -\frac{N_1 - N_2}{\lambda c}\frac{1,984}{V^2} = -\frac{N_1}{n_1}\frac{1,984\lambda}{4c\pi^2 a^2\,(n_1+n_2)}$$

$$n_1 + n_2 \simeq 2n_1 \Longrightarrow D_g = -\frac{N_1}{2n_1^2}\frac{1,984\lambda}{4c\pi^2 a^2} = -\frac{1,984\lambda N_1}{8\pi^2 c a^2 n_1^2}$$

$$= -\frac{1,984}{8\pi^2 \times 3 \times 10^8}\frac{\lambda N_1}{a^2 n_1^2} = -83,759 \times 10^{-12}\frac{\lambda N_1}{a^2 n_1^2} \text{ en } \mathrm{s\,m^{-2}}$$

$$= -83.759 \times \frac{\lambda N_1}{a^2 n_1^2}\ \mathrm{ps\,km^{-1}\,nm^{-1}}$$

on a $10^{-12}\,\mathrm{s} = \mathrm{ps}$

$\mathrm{m}^2 = \mathrm{m} \times \mathrm{m} = 10^{-3}\,\mathrm{km} \times 10^{9}\,\mathrm{nm} = 10^{6}\,\mathrm{km\,nm}$

$\lambda_{\,\mathrm{m}} = \lambda_{\,\mu\mathrm{m}} \times 10^{-6} \quad a_{\,\mathrm{m}} = a_{\,\mu\mathrm{m}} \times 10^{-6} \Longrightarrow \frac{\lambda_{\,\mathrm{m}}}{a_{\mathrm{m}}^2} = \frac{\lambda_{\,\mu\mathrm{m}}}{a_{\mu\mathrm{m}}^2} \times 10^{6}$

par exemple : $\lambda = 2\,\mu\mathrm{m} = 2 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$

$D_g = -83.759 \times 10^{-12}\frac{N_1}{n_1^2}\frac{\lambda_{\,\mathrm{m}}}{a_{\mathrm{m}}^2} \quad s/m^2$

$$= -83.759 \times 10^{-12} \frac{N_1}{n_1^2} \left(\frac{\lambda_{\mu m}}{a_{\mu m}^2} \times 10^6 \right) \times \left(10^{12}\,\mathrm{ps}\right) \times \left(10^6\,\mathrm{km\,nm}\right)^{-1}$$

$$= -83.759 \times \frac{\lambda_{\mu m} N_1}{a_{\mu m}^2 n_1^2}\ en\ \mathrm{ps\,km^{-1}\,nm^{-1}}$$

2. Si $D_m + D_g = 0 \Longrightarrow A \ln\left(\frac{\lambda}{B}\right) = 83.759 \times \frac{\lambda N_1}{a^2 n_1^2}$

$$\Longrightarrow a = \frac{1}{n_1}\sqrt{\frac{83.7 \times \lambda \times N_1}{A \ln(\lambda/B)}} = 1.9483\ \mu m$$

3. $D_g = -83.759 \times \frac{\lambda N_1}{a^2 n_1^2} = -23.394$

$$D_m = 145 \times \ln\left(\frac{1.6}{1.35}\right) = 24.635\ \mathrm{ps\ /km.nm}$$

$$D_n = \frac{L\,(ON)^2}{2cn_1} = 83.189\ ps$$

4. $M = \frac{V^2}{2} = 44$ modes

Exercice 12

Considèrons une fibre optique à saut d'indice : $n_1 = 1,5$ et $n_2 = 1,45$, de rayon de coeur $a = 80\mu m$ et de longueur $L = 15$ km. Pour les longueur d'onde $\lambda \leq 1\ \mu m$ l'indice de réfraction du coeur est liée à λ par la relation :

$$n = 1 + \frac{A}{B - C\lambda^{-2}}$$

Avec : $A = 197\ (eV)^2$, $B = 180\ (eV)^2$ et $C = 1.5393\ (\mathrm{eV}\mu m)^2$ et λ exprimé em μm.

1. Etablir la formule de l'ouverture numérique et calculer sa valeur numérique et la valeur de l'angle d'acceptance .
2. Estimer le nombre maximale de modes qui peuvent être guidés dans cette fibre avec $\lambda = 0.9\mu m$
3. Etablire une relation simple entre la dispersion intermodale τ_n et l'ouverture numérique. Calculer la valeur numérique de τ_n.
4. En considérant la constante de propagation $\beta = kn$, exprimer la vitesse de groupe V_g en fonction de n et λ et en déduire l'indice de groupe N.
5. On désigne par t_m le temps de transit de groupe et $\Delta t_m = \frac{dt_g}{d\lambda}\Delta\lambda$ la dispersion chromatique , calculer Δt_m en fonction de A, B, C, λ.,
6. En négligeant la dispersion du guide calculer la dispersion totale de fibre.

Solution 12 $n_1 = 1.5$; $n_2 = 1.45$; $\lambda = 0.9$; $a = 80\mu m$ et $L = 15$ km

1. cours
   $ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = 0.38406 \Longrightarrow \alpha_c = \arcsin(ON) = 22°.585$
2. C'est une fibre à saut d'indice $M = \frac{V^2}{2} = 23005$
3. cours $\Delta t_n = \frac{L}{2cn_1}(ON)^2 = 2.5862 \times 10^{-6}\,\mathrm{s} = 2.58\ \mu\mathrm{s}$

4. La vitesse de groupe est dèfinie par $V_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{d\omega}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\beta}$

   On a $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \Rightarrow d\omega = -\frac{2\pi c}{\lambda^2}d\lambda$

   Si $\beta = kn = \frac{2\pi n}{\lambda} \Rightarrow d\beta = -\frac{2\pi n}{\lambda^2}d\lambda + \frac{2\pi}{\lambda}dn$

   $\Longrightarrow \frac{d\beta}{d\lambda} = -\frac{2\pi n}{\lambda^2} + \frac{2\pi}{\lambda}\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda^2}\left(n - \lambda\frac{dn}{d\lambda}\right)$

   $V_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{-2\pi c}{\lambda^2}\left[-\frac{2\pi}{\lambda^2}\left(n - \lambda\frac{dn}{d\lambda}\right)\right]^{-1} = c\left(n - \lambda\frac{dn}{d\lambda}\right)^{-1}$

   On dèduit l'indice de groupe $N_g = \frac{c}{V_g} = \left(n - \lambda\frac{dn}{d\lambda}\right)$

   $n = 1 + \frac{A}{B - C\lambda^{-2}} \Longrightarrow \frac{dn}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\left(1 + \frac{A}{B - C\lambda^{-2}}\right) = -\frac{2AC\lambda}{\left(C - B\lambda^2\right)^2}$

   $N_g = n - \lambda\frac{dn}{d\lambda} = 1 + \frac{A}{B - C\lambda^{-2}} + \frac{2AC\lambda^2}{\left(C - B\lambda^2\right)^2} = \frac{\left(B^2 + AB\right)\lambda^4 + \left(-2BC + AC\right)\lambda^2 + C^2}{\left(C - B\lambda^2\right)^2}$

5. Le temps de transit de groupe est :

   $t_g = \frac{L}{V_g} = \frac{L}{c}\left(n - \lambda\frac{dn}{d\lambda}\right)$

   $\Delta t_m = \frac{dt_g}{d\lambda}\Delta\lambda = \frac{L\Delta\lambda}{c}\frac{d}{d\lambda}\left(n - \lambda\frac{dn}{d\lambda}\right) = -\frac{\lambda L\Delta\lambda}{c}\frac{d^2n}{d\lambda^2}$

6. $\Delta t_m = 4.05 \times 10^{-7} = 0.405\mu s$

   $\Delta t = \sqrt{\Delta t_n^2 + \Delta t_m^2} = 2.6177\ \mu s$

Exercice 13

Un signal dans la bande de fréquence $[\omega_0 - \omega, \omega_0 + \omega]$ se propage dans un milieu dispersif d'indice de réfraction n dont la vitesse de groupe est définie par $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ et $k = \frac{\omega n}{c}$. On désigne par τ le délai de transit sur 1 mètre de distance.

1. Calculer la différence de transit $\Delta\tau$ en fonction de ω et $\frac{d^2k}{d\omega^2}$
2. Exprimer la vitesse de groupe v_g en fonction de l'indice n,la célérité de la lumière c et la longueur d'onde λ, en démontrant que $\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{d\lambda}{\lambda}$. En déduire l'indice de groupe N_g.
3. Calculer l'expression du coefficient de dispersion $D = \frac{d\tau}{d\lambda}$. en fonction de n et λ puis en fonction de k et ω

Solution 13 : $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

1. La différence de transit est $\Delta\tau = \frac{d\tau}{d\omega}\Delta\omega$ avec $\tau = \frac{1}{v_g}$, $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

   et $\Delta\omega = (\omega_0 + \omega) - (\omega_0 - \omega) = 2\omega$

   $\Longrightarrow \Delta\tau = \left(\frac{d}{d\omega}\frac{1}{v_g}\right)\Delta\omega = \left(\frac{d}{d\omega}\frac{dk}{d\omega}\right)\Delta\omega = \frac{d^2k}{d\omega^2}\Delta\omega = 2\omega\frac{d^2k}{d\omega^2}$

2. $\dfrac{dk}{d\omega} = \dfrac{1}{v_g} = \dfrac{d}{d\omega}\left(\dfrac{\omega n}{c}\right) = \dfrac{1}{c}\left(n + \omega\dfrac{dn}{d\omega}\right)$

   On a $\omega = \dfrac{2\pi c}{\lambda} \Longrightarrow d\omega = -\dfrac{2\pi c}{\lambda^2}d\lambda = -\dfrac{\omega}{\lambda}d\lambda$

   $\Longrightarrow \dfrac{dk}{d\omega} = \dfrac{1}{v_g} = \dfrac{1}{c}\left(n + \omega\dfrac{dn}{d\lambda}\dfrac{d\lambda}{d\omega}\right) = \dfrac{1}{c}\left(n + \omega\left(-\dfrac{dn}{d\lambda}\dfrac{\lambda}{\omega}\right)\right) = \dfrac{1}{c}\left(n - \lambda\dfrac{dn}{d\lambda}\right)$

   L'indice de groupe est : $N_g = \dfrac{c}{v_g} = n - \lambda\dfrac{dn}{d\lambda}$

3. $D = \dfrac{d\tau}{d\lambda} = \dfrac{d}{d\lambda}\left(\dfrac{1}{v_g}\right) = \dfrac{d}{d\lambda}\left[\dfrac{1}{c}\left(n - \lambda\dfrac{dn}{d\lambda}\right)\right] = -\dfrac{\lambda}{c}\dfrac{d^2n}{d\lambda^2}$

   $D = \dfrac{d\tau}{d\lambda} = \dfrac{d\tau}{d\omega}\dfrac{d\omega}{d\lambda} = -\dfrac{\omega}{\lambda}\dfrac{d\tau}{d\omega} = -\dfrac{\omega}{\lambda}\dfrac{d^2k}{d\omega^2}$ avec $\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega}$ on obtient $D = -\dfrac{\omega^2}{2\pi c}\dfrac{d^2k}{d\omega^2}$