De l'atome aux semiconducteurs

Exercices corrigés

1. Masse de l'électron : $m = 9.1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
2. Charge de l'électron : $e = 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
3. Constante de Planck : $h = 6.62 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
4. $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1.053\,605\,723 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
5. Célérité de la lumière : $c = 3 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}$
6. $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$
7. $1\,\mathrm{m} = 10^{10}\,\text{Å}$

Exercice 1 *Le spectre de l'hydrogène est l'ensemble des longueurs d'onde présentes dans la lumière que l'atome d'hydrogène est capable d'émettre. Les valeurs de ces longueurs d'onde sont données par la formule de Rydberg :*

$$\frac{1}{\lambda_n} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

où m et n sont des entiers et $m < n$, et R est la constante de Rydberg :$R = 1.0974 \times 10^{7}\,\mathrm{m^{-1}} = 1.097\,4 \times 10^{-3}\,\text{Å}^{-1}$

Les longueurs d'onde sont, d'autre part, données par la relation empirique de ***Balmer*** *:*

$$\lambda_n = \lambda_0 \frac{n^2}{n^2 - 4}$$

où n est entier naturel ; $\lambda_0 = 3647.05\,\text{Å}$ $\left(1\,\mathrm{m} = 10^{10}\,\text{Å}\right)$

1. *Montrer que $R = \dfrac{4}{\lambda_0}$*
2. *Déterminer pour la série de raies, dite de Balmer, la plus petite valeur possible de n et en déduire la longueur d'onde de la raie correspondante.*
3. *Combien de raies observe-t-on si la série est limitée du côté des U.V par la raie de longueur d'onde $\lambda_V = 4000\,\text{Å}$*
4. *A l'aide de la formule généralisée de Balmer-Rydberg, déterminer les raies limites des séries de Lyman $(m = 1)$, de Paschen $(m = 3)$ et de Brackett $(m = 4)$*

Solution 1

1. On a $\dfrac{1}{\lambda_n} = \dfrac{n^2 - 4}{n^2 \lambda_0} = \dfrac{1}{\lambda_0}\left(1 - \dfrac{4}{n^2}\right) = \dfrac{4}{\lambda_0}\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{n^2}\right)$

   En comparant les deux relations on trouve $R = \dfrac{4}{\lambda_0} = \dfrac{4}{3647.05} \simeq 1.096\,8 \times 10^{-3}$

2. $\forall n, \lambda_n = \dfrac{n^2}{n^2 - 4}\lambda_0 > 0 \iff n^2 - 4 > 0$, c'est-à-dire $n > 2$, soit $n = 3$

   $\dfrac{1}{\lambda_3} = \dfrac{4}{\lambda_0}\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{5}{9\lambda_0} \Longrightarrow \lambda_3 = \dfrac{9\lambda_0}{5} = \dfrac{9}{5} \times 3647.05 = 6564.7\,\text{Å}$

3. La série est limitée du côté des U.V par la raie de longueur d'onde λ_V c'est-à-dire $\lambda_n \geq \lambda_V \iff \dfrac{\lambda_0 n^2}{n^2 - 4} \geq \lambda_V$

alors $\dfrac{n^2}{n^2-4} \geq \dfrac{\lambda_V}{\lambda_0}$ ou bien $\dfrac{\lambda_0}{\lambda_V} \geq \dfrac{n^2-4}{n^2} = 1 - \dfrac{4}{n^2}$

$\Longrightarrow \dfrac{\lambda_0}{\lambda_V} - 1 \geq -\dfrac{4}{n^2} \Longleftrightarrow 1 - \dfrac{\lambda_0}{\lambda_V} = \dfrac{\lambda_V - \lambda_0}{\lambda_V} \leq \dfrac{4}{n^2}$

soit : $n^2 \leq \dfrac{4\lambda_V}{\lambda_V - \lambda_0} = \dfrac{4 \times 4000}{4000 - 3647.05} = 45.332 \Longrightarrow n \leq \sqrt{45.332} = 6.7329$

Donc les valeurs de : $n = 3, 4, 5, 6$

Les longueurs d'ondes correspondantes sont : $\lambda_n = \dfrac{n^2}{n^2-4}\lambda_0$

$\lambda_3 = \dfrac{9}{9-4}\lambda_0 = \dfrac{9}{5}\lambda_0 = \dfrac{9}{5} \times 3647.05 = 6564.69\,\text{Å}$

$\lambda_4 = \dfrac{16}{16-4}\lambda_0 = \dfrac{4}{3}\lambda_0 = \dfrac{4}{3} \times 3647.05 = 4862.733\ \text{Å}$

$\lambda_5 = \dfrac{25}{25-4}\lambda_0 = \dfrac{25}{21}\lambda_0 = \dfrac{25}{21} \times 3647.05 = 4341.72619\,\text{Å}$

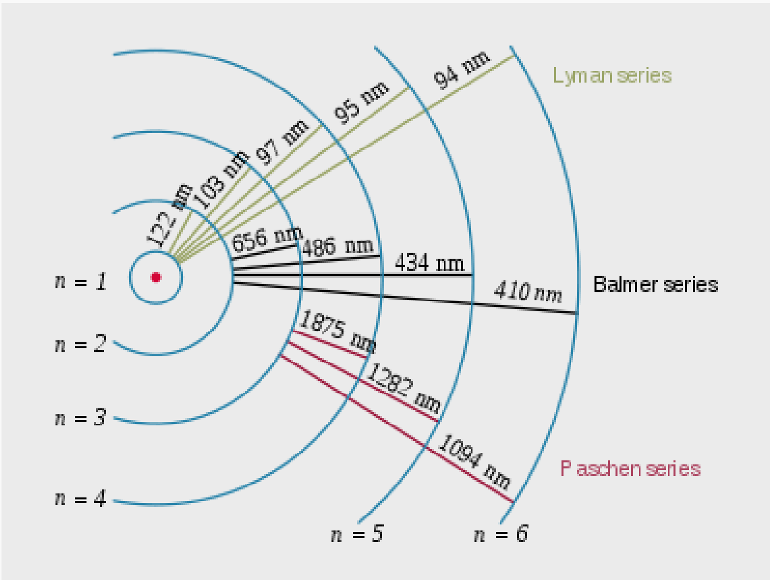
$\lambda_6 = \dfrac{36}{36-4}\lambda_0 = \dfrac{9}{8}\lambda_0 = \dfrac{9}{8} \times 3647.05 = 4102.93125\,\text{Å}$

4. $\lambda_{\text{lim}} \longrightarrow n = \infty$.On a $\dfrac{1}{\lambda_n} = R\left(\dfrac{1}{m^2} - \dfrac{1}{n^2}\right) \Longrightarrow \lambda_{\text{lim}} = \dfrac{m^2}{R}$

Série de Lyman $(m = 1)$: $\lambda_L = \dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{1.0968 \times 10^{-3}} = 911.74\,\text{Å}$

Série de Paschen $(m = 3)$: $\lambda_P = \dfrac{9}{R} = \dfrac{9}{1.0968 \times 10^{-3}} = 8205.7\,\text{Å}$

Série de Bracket $(m = 4)$: $\lambda_B = \dfrac{16}{R} = \dfrac{16}{1.0968 \times 10^{-3}} = 14588\,\text{Å}$



Exercice 2 *Dans le modèle de Bohr, l'atome d'hydrogène est constitué d'un électron de masse m décrivant une orbite circulaire autour du noyau supposé fixe.*

1. *Établir l'expression de l'énergie totale de l'électron en fonction du rayon r de l'orbite ; on prendra l'énergie potentielle nulle à l'infini.*
2. *En tenant compte des postulats de Bohr :*
   (a) *Etablir l'expression du rayon d'une orbite permise et de l'énergie correspondante ;*
   (b) *Calculer, pour l'atome d'hydrogène, le rayon de la plus petite orbite et l'énergie de l'état fondamental.*
3. *Calculer la longueur d'onde de la radiation nécessaire pour faire passer l'atome d'hydrogène de l'état fondamental au premier état excité.*

Solution 2

1. L'énergie totale de l'électron est $E = T + V$

où T est l'énergie cinétique : $T = \frac{1}{2}mv^2$ et V est l'énergie potentielle.

– L'électron est soumis à la force d'attraction de Coulomb (due au noyau) :

$$\overrightarrow{F} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\overrightarrow{r}$$

F dérive d'un potentiel V : $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$

Le travail effectué par l'électron passer de $+\infty$ à la distance r est tel que

$dW = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = -\overrightarrow{\text{grad}}V \cdot \overrightarrow{dr} = -dV$

$V(r) = \int \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + C$

on a $V(+\infty) = 0$ donc $C = 0$ et par suite

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

– Le mouvement étant circulaire, la force centrifuge est $F' = \frac{mv^2}{r}$

à l'équilibre on a : $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{F'} \iff \frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Longrightarrow mv^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

L'énergie cinétique s'écrit :

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

L'énergie totale est :

$$E = T + V = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

2. Postulat de Bohr : le moment cinétique de l'électron est quantifié $mvr = n\hbar$

(a) $mv = \frac{n\hbar}{r} \iff m^2v^2 = \frac{n^2\hbar^2}{r^2}$

alors $mv^2 = \frac{n^2\hbar^2}{mr^2}$, d'après l'expression de l'énergie cinétique on trouve : $mv^2 = \frac{n^2\hbar^2}{mr^2} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$, soit

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2\hbar^2}{me^2}$$

rapportons r_n dans l'expression de E :

$E = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{me^2}{4\pi\varepsilon_0 n^2\hbar^2} = -\frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}\frac{1}{n^2}$

On a $\varepsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$, $e = 1.60217733 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$, $m = 9.1093897 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, $h = 6.6260755 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

donc

$\frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2} = \frac{9.11 \times 10^{-31} \times \left(1.602 \times 10^{-19}\right)^4}{32\pi^2\left(8.854 \times 10^{-12}\right)^2 \times \left(6.626 \times 10^{-34}\right)^2} \times 4\pi^2 = 2.179\,2 \times 10^{-18}\,\mathrm{J}$

en eV : $2.179\,2 \times 10^{-18}\,\mathrm{J} = \frac{2.179\,2 \times 10^{-18}}{1.602 \times 10^{-19}} = 13.603\,\mathrm{eV}$

Soit

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2}\,\mathrm{eV}$$

$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2\hbar^2}{me^2} = \frac{4\pi \times 8.854 \times 10^{-12} \times \left(6.626 \times 10^{-34}\right)^2}{4\pi^2 \times 9.11 \times 10^{-31} \times \left(1.602 \times 10^{-19}\right)^2}n^2$

$\simeq 5.3 \times 10^{-11}n^2\,\mathrm{m} = 0.53n^2\,\mathrm{Å}$

(b) le rayon de la plus petite orbite $\longrightarrow n = 1 : a_0 = r_1 = 0.53\,\mathrm{Å}$

et l'énergie de l'état fondamental $E_1 = -13.6\,\mathrm{eV}$

3. L'énergie du premier état excité est $E_2 = -\dfrac{13.6}{4} = -3.4$
donc $\Delta E = E_2 - E_1 = -3.4 + 13.6 = 10.2\,\mathrm{eV}$
$\Delta E_{\mathrm{J}} = \dfrac{hc}{\lambda} \Longrightarrow \Delta E_{\mathrm{eV}} = \dfrac{hc}{e\lambda} = \dfrac{6.626 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^{8}}{1.602 \times 10^{-19}\lambda} = \dfrac{1.2408 \times 10^{-6}}{\lambda}$
Si on exprime λ en μm, on obtient la relation : $\Delta E_{\mathrm{eV}} = \dfrac{1.24}{\lambda_{\mu\mathrm{m}}}$ soit

$$\lambda_{\mu\mathrm{m}} = \frac{1.24}{\Delta E_{\mathrm{eV}}}$$

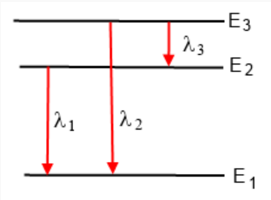
Pour aller de E_1 à E_2 : $\lambda_{\mu\mathrm{m}} = \dfrac{1.2408}{10.2} = 0.12165\,\mu\mathrm{m} = 1216.5\,\text{Å}$

Exercice 3 *On bombarde de l'hydrogène avec des électrons accélérés par une tension de* $12.1\,\mathrm{V}$.

1. *Quels niveaux peuvent être excités ?*
2. *Quels sont les raies possibles que l'on peut observer ?*

Solution 3

1. L'énergie d'excitation est $E_e = 12.1\,\mathrm{eV}$
Il y a excitation si l'énergie fournie est au moins égale
$\Delta E = E_n - E_1 \leq E_e \Longleftrightarrow -\dfrac{13.6}{n^2} + 13.6 \leq 12.1$
$\Longrightarrow -\dfrac{13.6}{n^2} \leq 12.1 - 13.6 = -1.5 \Longleftrightarrow \dfrac{13.6}{n^2} \geq 1.5$
$\Longrightarrow n^2 \leq \dfrac{13.6}{1.5} = 9.0667$ soit $n \leq 3$
Les niveaux excités sont : $n = 2\,(L)$ et $n = 3\,(M)$
2. Les raies possibles que l'on peut observer sont pour les transitions : $L \rightarrow K, M \rightarrow K$ et $M \rightarrow L$



$E_2 = -\dfrac{13.6}{4} = -3.4\,\mathrm{eV}$, $E_3 = -\dfrac{13.6}{9} = -1.5111\,\mathrm{eV}$
$\lambda_{\mu\mathrm{m}} = \dfrac{1.24}{\Delta E_{\mathrm{eV}}}$:
$n = 2 \rightarrow n = 1 : \lambda_{1\,\mu\mathrm{m}} = \dfrac{1.24}{\Delta E_{\mathrm{eV}}} = \dfrac{1.24}{-3.4 + 13.6} = 0.12157\,\mu\mathrm{m}$
$n = 3 \rightarrow n = 1 : \lambda_{2\,\mu\mathrm{m}} = \dfrac{1.24}{\Delta E_{\mathrm{eV}}} = \dfrac{1.24}{-1.5111 + 13.6} = 0.10257\,\mu\mathrm{m}$
$n = 3 \rightarrow n = 2 : \lambda_{3\,\mu\mathrm{m}} = \dfrac{1.24}{\Delta E_{\mathrm{eV}}} = \dfrac{1.24}{-1.5111 + 3.4} = 0.65647\,\mu\mathrm{m}$

Exercice 4 *Une source Laser émet de la lumière continue de puissance moyenne* $P = 5\,\mathrm{mW}$, *à la longueur d'onde* $\lambda = 650\,\mathrm{nm}$.

1. *Quelle la valeur de l'impulsion de chaque photon*
2. *Quel est le nombre des photons émis par seconde*

Solution 4

1. $p = \dfrac{h}{\lambda} = \dfrac{6.626 \times 10^{-34}}{650 \times 10^{-9}} = 1.0194 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg.\,m/\,s}$

2. L'énergie de chaque photon est $E = pc = 1.0194 \times 10^{-27} \times 3 \times 10^{8} = 3.0582 \times 10^{-19} = \dfrac{3.0582 \times 10^{-19}}{1.602 \times 10^{-19}} = 1.9090\,\mathrm{eV}$

   Ou bien $E = \dfrac{1.24}{\lambda_{\mu\mathrm{m}}} = \dfrac{1.24}{0.65} = 1.9077\,\mathrm{eV} = 1.9077 \times 1.602 \times 10^{-19} = 3.0561 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$

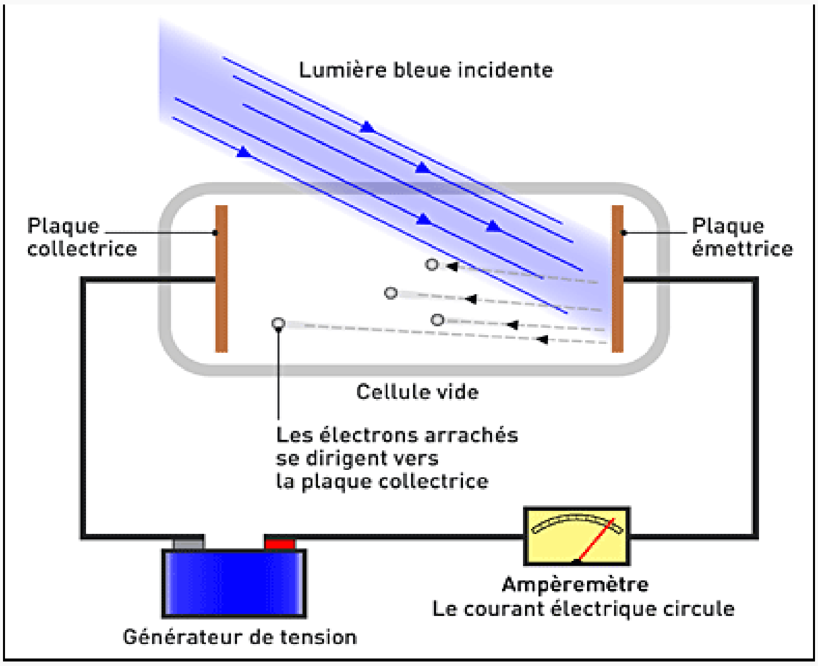
   La puissance est P est l'énergie totale émise par seconde, elle est égale à l'énergie des N photons émis par seconde :

   $P = 5 \times 10^{-3}\,\mathrm{J/\,s} = NE \Longrightarrow N = \dfrac{5 \times 10^{-3}}{3.0561 \times 10^{-19}} = 1.6361 \times 10^{16}\mathrm{photons/\,s}$

Exercice 5 *Le potentiel d'extraction des électrons de césium (Cs_{55}) est $V = 1.8\,\mathrm{V}$*

1. *Calculer la fréquence et la longueur d'onde du seuil photoélctrique.*
2. *Calculer la vitesse des photoélectrons arrachés si la cellule photoélectrique est éclairée par une radiation UV de longueur d'onde $\lambda = 0.254\,\mu\mathrm{m}$,*
3. *On éclaire la cellule par la radiation $\lambda = 0.254\,\mu\mathrm{m}$ et on applique une tension inverse entre l'anode et la cathode, que doit être la valeur de cette tension pour que l'anode ne recoive aucun électron ?.*

Solution 5



1. L'énergie d'arrachement de l'électron est

$$E_0 = eV = 1.8\,\mathrm{eV} = 1.602 \times 10^{-19} \times 1.8 = 2.88 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

La fréquence du seuil correspondante est ν_0 telle que $h\nu_0 = E_0$, soit

$$\nu_0 = \frac{E_0}{h} = \frac{2.8836 \times 10^{-19}}{6.626 \times 10^{-34}} = 4.35 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz}.$$

La longueur d'onde du seuil est

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{3 \times 10^{8}}{4.35 \times 10^{14}} = 6.896551724 \times 10^{-7}\,\mathrm{m} = 0.689\,\mu\mathrm{m}$$

2. L'énergie des photons incidents est $E = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda}$ ou bien $E_{(\,\mathrm{eV})} = \dfrac{1.24}{\lambda_{(\,\mu\mathrm{m})}} = \dfrac{1.24}{0.245} = 5.06\,\mathrm{eV}$

Une quantité E_0 est absorbée pour arracher l'électron, le reste se transforme en énergie cinétique, donc

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = E - E_0 = 5.06 - 1.8 = 3.26\,\mathrm{eV} = 5.22 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

la vitesse maximale est

$$v = \sqrt{\frac{2\,(E - E_0)}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 5.22 \times 10^{-19}}{9.1 \times 10^{-31}}} = 1.071 \times 10^6\,\mathrm{m/\,s}$$

3. La tension à chercher est celle qui annule la vitesse donc l'énergie cinétique : $eU = E_c = 3.26$ eV soit alors $U = 3.26\,\mathrm{V}$