Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

Mathématiques pour les Électriciens (LB203)

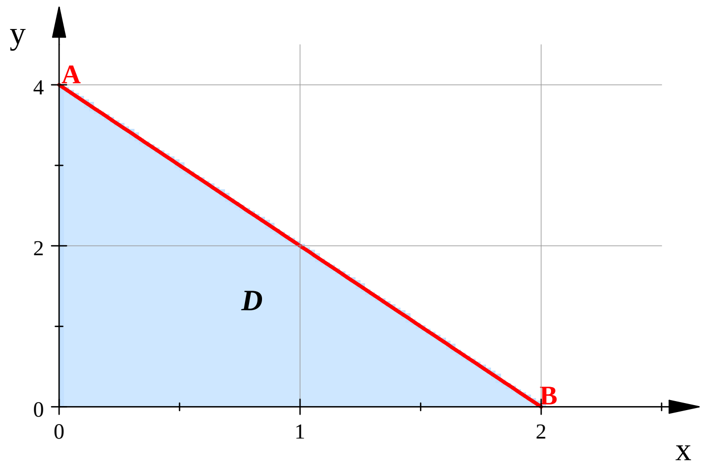
Examen Final 2012-2013-Semestre I **Durée : 3: 00 h**

Solutions et Barèmes

Exercice 1 (20 points) *On considère une plaque métallique D en forme d'un triangle de sommets $O(0,0)$, $A(2,0)$ et $B(0,4)$. La plaque est chargée avec une densité de charge $\lambda(x,y) = (x-y)^2$ et sa densité surfacique de masse est $\sigma(x,y) = xy$*

1. Calculer la charge totale de D.
2. Déterminer le centre de gravité de D
3. Calculer les moments d'inertie de D par rapport à l'axe ox, l'axe oy , et par rapport à l'origine.
4. Soit (V) le solide limité par D,les plans $x=0, y=0$ et la portion du plan d'équation $2x+y+z=4$,Calculer le volume de (V)

Solution 1 *:*



$(x>0, y<-2x+4)$

D *est le domaine limité par les axes Ox et Oy et la droite (AB) d'équation $y=-2x+4$*
Dans le domaine (D) : $0 \leq x \leq 2$ *et* $0 \leq y \leq -2x+4$

1. La charge d'un élément de surface est $dQ = \lambda dxdy$ donc la charge totale est :

$$Q = \iint_D \lambda(x,y)\,dxdy = \iint_D (x-y)^2\,dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{-2x+4} (x^2+y^2+2xy)\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(x^2y + xy^2 + \frac{1}{3}y^3 \right)_0^{-2x+4} dx = \int_0^2 \left(-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 16x + \frac{64}{3} \right) dx = \frac{56}{3}\ \mathrm{C}$$

2. Soit $G(X,Y)$ le centre de gravité de D alors $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{m}\iint\limits_D \overrightarrow{r}\,dm = \dfrac{1}{m}\iint\limits_D \overrightarrow{r}\sigma dxdy$

   $m = \iint\limits_D \sigma dxdy = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{-2x+4} (xy)\,dy\right) dx = \dfrac{8}{3}$

   $X = \dfrac{1}{m}\iint\limits_D x\sigma dxdy = \dfrac{3}{8}\int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{-2x+4} x\,(xy)\,dy\right) dx = \dfrac{4}{5}$

   $Y = \dfrac{1}{m}\iint\limits_D y\sigma dxdy = \dfrac{3}{8}\int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{-2x+4} y\,(xy)\,dy\right) dx = \dfrac{8}{5}$

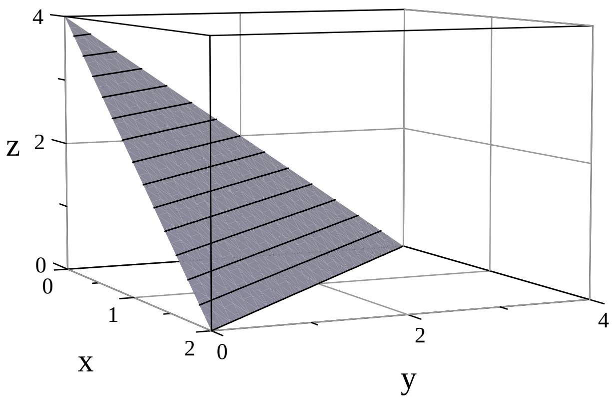
   $G\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$.

3. Le moment d'inertie par rapport à un axe Δ d'un élément de masse dm est $dI_\Delta = \rho^2 dm = \rho^2\sigma dxdy$

   Alors $I_\Delta = \iint\limits_D \rho^2\sigma dxdy = \iint\limits_D \rho^2 xydxdy$

   - Par rapport à l'axe Ox : $\rho = y$
     $I_x = \iint\limits_D (y^2)(xy)\,dxdy = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{-2x+4} xy^3dy\right) dx = \dfrac{128}{15}$
   - Par rapport à l'axe Oy : $\rho = x$
     $I_x = \iint\limits_D (x^2)(xy)\,dxdy = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{-2x+4} x^3ydy\right) dx = \dfrac{32}{15}$
   - Par rapport à l'origine O : $\rho = r$
     $I_O = \iint\limits_D (r^2)(xy)\,dxdy = I_x + I_y = \dfrac{128}{15} + \dfrac{32}{15} = \dfrac{32}{3}$

4. Dans $(V) : 0 \leq z \leq 1 - x - y$



$V = \iiint\limits_V dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_0^{1-x-y} dz\right) dxdy = \iint\limits_D (4 - 2x - y)\,dxdy$

$= \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{-2x+4} (4 - 2x - y)\,dy\right) dx = \dfrac{16}{3}$

Exercice 2 (15 points) *On considère les matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad et\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -j \\ 1 & -1 & -j \\ j & -j & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2, A^3 et en déduire A^n.
2. Calculer B^2, B^3 et en déduire B^n
3. Calculer AB et exprimer $(AB)^2$ en fonction de AB
4. Les matrices A et B sont-elles inversibles?

Solution 2 *:*

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$

   $A^3 = A^2 A = AA = A^2 = A \Longrightarrow A^n = A$

   Supposant que $A^n = A \Longrightarrow A^{n+1} = A^n \times A = A \times A = A^2 = A$

   Donc $A^n = A \ \forall n \in \mathbb{N}$

2. $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -j \\ 1 & -1 & -j \\ j & -j & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -j \\ 1 & -1 & -j \\ j & -j & 1 \end{pmatrix} = B \Longrightarrow B^n = B$

3. $AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -j \\ 1 & -1 & -j \\ j & -j & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+j & -2-j & 1-2j \\ 3+2j & -3-2j & 2-3j \\ -1 & 1 & j \end{pmatrix}$

   $(AB)^2 = \begin{pmatrix} 2+j & -2-j & 1-2j \\ 3+2j & -3-2j & 2-3j \\ -1 & 1 & j \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2-j & 2+j & -1+2j \\ -3-2j & 3+2j & -2+3j \\ 1 & -1 & -j \end{pmatrix} = -AB$

4. $\det(A) = \det(B) = 0$ donc A et B ne sont pas inversibles

Exercice 3 (10 points) *On considère les intégrales:*

$$I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx \quad et \ J = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

Calculer $I + J$, et $I - J$ puis déduire I et J.

Solution 3 *:*

$I + J = \displaystyle\int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int dx = x + C$

$I - J = \displaystyle\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\cos x + \sin x)^2} dx$

$= \displaystyle\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x} dx = \int \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} dx = \frac{1}{2} \ln(\sin 2x + 1) + C'$

Ou bien on peut utiliser la relation: $\dfrac{\cos(\pi/4 + x)}{\sin(\pi/4 + x)} = \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$

plus simplement: on pose $u = \cos x + \sin x \Longrightarrow du = (-\sin x + \cos x)\, dx$

$\displaystyle\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln(\cos x + \sin x) + C$

$I = \dfrac{(I+J) + (I-J)}{2} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4} \ln(\sin 2x + 1) + k$

$J = \dfrac{(I+J) - (I-J)}{2} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4} \ln(\sin 2x + 1) + k'$.

Exercice 4 (15 points) *On considère le champ vectoriel*

$$\overrightarrow{H} = \overrightarrow{r}\exp\left(-r^2\right)$$

1. Calculer $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{H}$ est un champ de gradient.
3. Déterminer le champ scalaire $f(x,y)$ tel que $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla f}$ et $f(\infty,\infty,\infty) = 0$

Solution 4 $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{r}\exp\left(-r^2\right) = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} + R\overrightarrow{k}$

1. $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{H} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$

   $P = xe^{-x^2-y^2-z^2} \Longrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial x} = e^{-x^2-y^2-z^2} - 2x^2e^{-x^2-y^2-z^2} = \left(1-2x^2\right)e^{-x^2-y^2-z^2}$

   $Q = ye^{-x^2-y^2-z^2} \Longrightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial y} = e^{-x^2-y^2-z^2} - 2y^2e^{-x^2-y^2-z^2} = \left(1-2y^2\right)e^{-x^2-y^2-z^2}$

   $R = ze^{-x^2-y^2-z^2} \Longrightarrow \dfrac{\partial R}{\partial z} = \left(1-2z^2\right)e^{-x^2-y^2-z^2}$ alors

   $$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{H} = \left(3-2r^2\right)e^{-r^2}$$

   $\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H} = \left(\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} + \left(\dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}\right)\overrightarrow{j} + \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}$

   $\dfrac{\partial R}{\partial y} = -2yze^{-x^2-y^2-z^2} \qquad \dfrac{\partial Q}{\partial z} = -2yze^{-x^2-y^2-z^2} \Longrightarrow \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} = 0$

   de même on trouve: $\left(\dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$ par suite

   $$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H} = \overrightarrow{0}$$

2. $\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{H}$ est un champ de gradient.
3. $\overrightarrow{H}$ est un champ de gradient, c-à-d il existe une fonction $f(x,y,z)$; $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla f}$

   C'est-à-dire: $\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr} = df$

   $df = \overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr} = \overrightarrow{r}\exp\left(-r^2\right)\cdot\overrightarrow{dr} = r\exp\left(-r^2\right)dr$

   $f = \int r\exp\left(-r^2\right)dr = -\dfrac{1}{2}e^{-r^2} + C$

   $f(\infty) = C = 0$ d'où finalement:

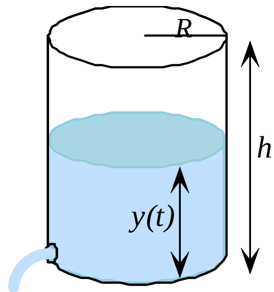
   $$f(x,y,z) = -\frac{1}{2}e^{-r^2} = -\frac{1}{2}e^{-x^2-y^2-z^2}$$

Exercice 5 (15 points) *On considère un récipient cylindrique de hauteur h et de rayon de base R contenant un liquide non visqueux, le récipient est percé en bas par un petit trou circulaire rayon r.*

Suivant la loi de Torricelli l'écoulement du liquide est régi par l'équation différentielle:

$$\frac{dV}{dt} + kA\sqrt{y} = 0 \qquad (E_1)$$

Où à l'instant t :$V = V(t)$ est le volume de l'eau dans le récipient , $y = y(t)$ est sa hauteur, A est la section du trou et k une constante positive. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le récipient était plein ($y(0) = h$).



1. Montrer que l'équation (E_1) devient une équation à variables séparables sous la forme:

$$\frac{dy}{dt} = -k\alpha^2\sqrt{y} \qquad (E_2)$$

où $\alpha = \frac{r}{R}$.

2. En intégrant l'équation (E_2) ,dèterminer la hauteur instantanée du liquide $y\,(t)$.

3. A quelle instant le récipient devient vide?

Applications numériques:
$h = 100\,\mathrm{cm}$ $\quad R = 30\,\mathrm{cm}$ $\quad r = 1\,\mathrm{cm}$ $\quad k = 40\,\mathrm{cm}^{1/2}.\,\mathrm{s}^{-1}$

Solution 5 *:*

1. Le volume du liquide,à l'instant t, dans le récipient est : $V\,(t) = \pi R^2 y$, R est le rayon du base du récipient, c'est une constant, donc $\frac{dV}{dt} = \pi R^2 \frac{dy}{dt}$

   L'équation (E_1) s'écrit : $\frac{dV}{dt} = -kA\sqrt{y}$, or A est la section du trou : $A = \pi r^2$ donc on a:

   $\pi R^2 \frac{dy}{dt} = -k\pi r^2\sqrt{y}$ ou bien:

$$\frac{dy}{dt} = -k\frac{r^2}{R^2}\sqrt{y} = -k\alpha^2\sqrt{y}$$

2. L'équation (E_2) est une équation différentielle du premier order à variables séparables, alors:

   $\frac{dy}{\sqrt{y}} = -k\alpha^2 dt$

   $\int y^{-1/2}dy = -k\alpha^2 \int dt$

   $\Longrightarrow 2\sqrt{y\,(t)} = -k\alpha^2 t + C$

   $\Longrightarrow y\,(t) = \frac{1}{4}\left(C - k\alpha^2 t\right)^2$

   $y\,(0) = h \Longrightarrow C = 2\sqrt{h}$ d'où:

$$y\,(t) = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{h} - k\alpha^2 t\right)^2$$

3. Le récipient devient vide à l'instant t_1 tel que $y\,(t_1) = 0$,c'est-à-dire pour: $2\sqrt{h} - k\alpha^2 t_1 = 0$ donc

$$t_1 = \frac{2\sqrt{h}}{k\alpha^2} = \frac{2R^2\sqrt{h}}{kr^2}$$

App.Num.: $h = 100\,\text{cm}$ $\quad R = 30\,\text{cm}$ $\quad r = 1\,\text{cm}$ $\quad k = 40\,\text{cm}^{1/2}.\,\text{s}^{-1}$

$t_1 = \dfrac{2R^2\sqrt{h}}{kr^2} = \dfrac{2 \times 900 \times \sqrt{100}}{40 \times 1} = 450\,\text{s}$

$t_1 = \dfrac{450}{60} = \dfrac{15}{2} = 7.5\,\text{min}.$

Exercice 6 (25 points) *On considère l'équation différentielle :*

$$y'' - 2ay' + y = 2a\sin x \qquad (E)$$

Où a est un réel tel que $a \in]-1, 0[\cup]0, 1[$. On pose $\omega = \sqrt{1 - a^2}$.

1. Déterminer $y_1(x)$ la solution générale de l'équation sans second membre associée à (E).
2. Déterminer $y_2(x)$ une solution particulière de (E). Déduire $y(x)$ la solution générale de (E).
3. Déterminer $y_p(x)$ la solution de (E)telle que $y_p(0) = 0$ et $y_p'(0) = 0$.
4. Soit $u(x)$ la fonction solution de l'équation différentielle $u'' - 2u' + u = 2\sin x$ avec $u(0) = 0$ et $u'(0) = 0$.

   Comparer $u(x)$ et $\lim\limits_{a \to 1} y_p(x)$.

Solution 6 *:*

1. L'équation homogène associée à (E) est : $y'' - 2ay' + y = 0$

   Son équation caractéristique est : $\lambda^2 - 2a\lambda + 1 = 0$

   $\Delta' = a^2 - 1 = -\omega^2 < 0$

   les racines sont $\lambda_{1,2} = a \pm j\omega \Longrightarrow$

   $$y_1(x) = e^{ax}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$$

2. La solution particulière de l'équation complète est de la forme: $y_2 = \alpha\cos x + \beta\sin x$

   $y_2' = -\alpha\sin x + \beta\cos x \qquad y_2'' = -\alpha\cos x - \beta\sin x$

   $y'' - 2ay' + y = 2a\sin x$

   $\Longrightarrow -\alpha\cos x - \beta\sin x - 2a(-\alpha\sin x + \beta\cos x) + \alpha\cos x + \beta\sin x = 2a\sin x$

   $\Longrightarrow 2a\alpha\sin x - 2a\beta\cos x = 2a\sin x$

   Par identification on trouve : $\beta = 0$ et $\alpha = 1 \Longrightarrow$

   $$y_2(x) = \cos x$$

   Finalement:

   $$y(x) = e^{ax}(A\cos\omega x + B\sin\omega x) + \cos x$$

3. $y(0) = A + 1 = 0 \Longrightarrow A = -1 \Longrightarrow y(x) = e^{ax}(-\cos\omega x + B\sin\omega x) + \cos x$

   $y'(x) = ae^{ax}(-\cos\omega x + B\sin\omega x) + e^{ax}(\omega\sin\omega x + B\omega\cos\omega x) - \sin x$

   $y'(0) = -a + B\omega = 0 \Longrightarrow B = \dfrac{a}{\omega}$ alors:

   $$y_p(x) = e^{ax}\left(-\cos\omega x + \frac{a}{\omega}\sin\omega x\right) + \cos x$$

4. Dans le cas $u'' - 2u' + u = 2\sin x$:

   L'équation caractéristique de l'ESSM : est $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$ a une racine double: $r = 1$

   La solution générale de (E) est donc : $u(x) = e^x (mx + n) + \cos x$

   $u(0) = n + 1 = 0 \Longrightarrow n = -1$

   $u'(x) = e^x (mx + n + m) - \sin x$

   $u'(0) = n + m = 0 \Longrightarrow m = -n = 1$

   $$u(x) = e^x (x - 1) + \cos x$$

   Si $a \to 1 \Longrightarrow \omega = \sqrt{1 - a^2} \to 0$

   $\cos \omega x \to 1 \qquad e^{ax} \to e^x$

   $\lim\limits_{a \to 1} \frac{a}{\omega} \sin \omega x = \lim\limits_{a \to 1} ax \frac{\sin \omega x}{\omega x} = x$

   $\Longrightarrow \lim\limits_{a \to 1} y_p(x) = \lim\limits_{a \to 1} e^{ax} \left(-\cos \omega x + \frac{a}{\omega} \sin \omega x \right) + \cos x = e^x (-1 + x) + \cos x = u(x)$