Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban
le cnam

# Mathématiques pour les Électriciens ( LB203 )

## Examen Final 2013-2014 - Semestre I
## Solutions

**Exercice 1 (10 points)** : 1 mole de gaz parfait qui occupe le volume $V$ à la température $T$ et à la pression $P$ vérifie la relation $PV = \mathcal{R}T$ où $\mathcal{R}$ est la constante molaire. Montrer que

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1 \text{ et } T\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial T} = \mathcal{R}$$

*Solution 1*

$P = \dfrac{\mathcal{R}T}{V} \Longrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial V} = -\dfrac{\mathcal{R}T}{V^2}$ 1 point et $\dfrac{\partial P}{\partial T} = \dfrac{\mathcal{R}}{V}$ 1 point

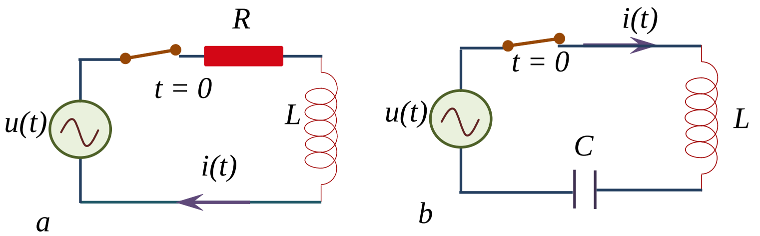
$V = \dfrac{\mathcal{R}T}{P} \Longrightarrow \dfrac{\partial V}{\partial T} = \dfrac{\mathcal{R}}{P}$ 1 point

$T = \dfrac{PV}{\mathcal{R}} \Longrightarrow \dfrac{\partial T}{\partial P} = \dfrac{V}{\mathcal{R}}$ 1 point

▲ $\dfrac{\partial P}{\partial V}\dfrac{\partial V}{\partial T}\dfrac{\partial T}{\partial P} = \left(-\dfrac{\mathcal{R}T}{V^2}\right)\left(\dfrac{\mathcal{R}}{P}\right)\left(\dfrac{V}{\mathcal{R}}\right) = -\dfrac{\mathcal{R}T}{PV} = -1$ 3 points

▲ $T\dfrac{\partial P}{\partial T}\dfrac{\partial V}{\partial T} = T\left(\dfrac{\mathcal{R}}{V}\right)\left(\dfrac{\mathcal{R}}{P}\right) = \dfrac{\mathcal{R}^2T}{PV} = \mathcal{R}$ 3 points

**Exercice 2 (35 points)** : Un circuit $(R, L)$, contenant un conducteur ohmique de résistance constante $R$, (exprimée en $\Omega$) , en série avec une bobine d'inductance pure de $L$ henrys ( mH), et un générateur de tension variable $u(t)$ exprimée en volt ( V) (Fig. a)




Le courant électrique $i(t)$ est en fonction du temps et exprimée en ampères ( A) et défini par l'équation différentielle

$$L\frac{di}{dt} + Ri = u(t)$$

1. Déterminer $i(t)$ si $R = 6\,\Omega$, $L = 3\,\text{mH}$, $V(t) = 3\sin t$ V. et $i(0) = 0$ A.

2. On considère maintenant le circuit $(L, C)$, (Fig. b) un condensateur de capacité $C$ (exprimée en mF) en série avec la bobine $(L)$, soumis, à l'instant $t = 0$, à la tension $u(t) = u_0 \cos \omega t$
Le courant électrique est alors défini en fonction du temps par l'équation différentielle :

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C} = u(t)$$

   (a) Déterminer l'expression générale de $i(t)$ en fonction de $u_0, \omega$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \neq \omega$

   (b) On donne : $L = 1\,\text{mH}, C = \frac{1}{9}\,\text{mF}$, $u(t) = 5\cos 5t$. Déterminer l'expression particulière de $i(t)$ en prenant comme conditions initiales $i(0) = 0\,\text{A}$ et $\frac{di}{dt}(0) = 0$

*Solution 2*

1. l'équation différentielle du circuit $(a)$ est

$$3\frac{di}{dt} + 6i = 3\sin t \qquad (E_1)$$

c'est une équation linéaire du premier ordre.

– l'équation sans second membre est alors $3\frac{di}{dt} + 6i = 0$ ou bien

$$\frac{di}{dt} + 2i = 0 \qquad (E_2)$$

En séparant les variables, on écrit

$$\frac{di}{i} = -2dt \quad \boxed{\text{1 point}}$$

L'intégration de deux membres nous donne $i_1(t) = Ke^{-2t}$ $\boxed{\text{1 point}}$

– Pour trouver une solution particulière de l'équation complète on suppose que $K = K(t)$ $\boxed{\text{1 point}}$

Alors $\frac{di}{dt} = (K' - 2K)\,e^{-2t}$ $\boxed{\text{1 point}}$

Substituons dans l'équation $E_1$ :

$3(K' - 2K)\,e^{-2t} + 6Ke^{-2t} = 3\sin t \Longleftrightarrow K' = e^{-2t}\sin t$ $\boxed{\text{2 points}}$

En intégrant deux fois par parties on trouve

$K = \int e^{2t}\sin t dt = -\frac{1}{5}e^{2t}(\cos t - 2\sin t)$ $\boxed{\text{5 points}}$

Soit $i_2(t) = \frac{1}{5}(2\sin t - \cos t)$ $\boxed{\text{1 point}}$ et

$$i(t) = Ke^{-2t} + \frac{1}{5}(2\sin t - \cos t) \quad \boxed{\text{1 point}}$$

Pour $t = 0 : i(0) = K - \frac{1}{5} = 0 \Longrightarrow K = \frac{1}{5}$ $\boxed{\text{1 point}}$ soit

$$i(t) = \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{1}{5}(2\sin t - \cos t) \quad \boxed{\text{1 point}}$$

2. En divisant par $L$, l'équation différentielle du circuit $(b)$ s'écrit $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{LC} = \frac{u_0}{L}\cos\omega t$ ou bien

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \omega_0^2 i = \lambda\cos\omega t \quad \boxed{\text{1 point}} \qquad (F_1)$$

où $\lambda = \frac{u_0}{L}$

(a) L'équation sans second membre est :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \omega_0^2 i = 0 \quad \boxed{\text{1 point}} \qquad (F_2)$$

son équation caractéristique est $r^2 + \omega_0^2 = 0.$ $\boxed{\text{1 point}}$

les racines sont $r_{1,2} = \pm j\omega_0$ $\boxed{\text{2 points}}$

La solution générale de $(F_2)$ est

$$i_1(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \quad \boxed{\text{2 points}}$$

on a $\omega \neq \omega_0$ alors on cherchera une solution particulière de $(F_1)$ sous la forme $i_2 = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ $\boxed{\text{2 points}}$

$\frac{di}{dt} = -\omega a\sin\omega t + b\omega\cos\omega t$ $\boxed{\text{1 point}}$

et $\frac{d^2i}{dt^2} = -a\omega^2\cos\omega t - b\omega^2\sin\omega t$ $\boxed{\text{1 point}}$

Substituons dans $(F_1)$ :

$-a\omega^2\cos\omega t - b\omega^2\sin\omega t + a\omega_0^2\cos\omega t + b\omega_0^2\sin\omega t = \lambda\cos\omega t$ $\boxed{\text{1 point}}$

On obtient : $\begin{cases} a\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) = \lambda \\ b\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) = 0 \end{cases} \Longrightarrow b = 0$

et $a = \frac{\lambda}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{u_0}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)L}$ $\boxed{\text{1 point}}$

donc $i_2 = \frac{u_0}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)L}\cos\omega t$ $\boxed{\text{1 point}}$ et :

$$i(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \frac{u_0}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)L}\cos\omega t \quad \boxed{\text{1 point}}$$

(b) On a $L = 1\,\text{mH}, C = \frac{1}{9}\,\text{mF}$, $u(t) = 5\cos 5t$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1/9}} = 3 \Longrightarrow \omega_0^2 - \omega^2 = 9 - 25 = -16$ $\boxed{\text{1 point}}$

$$i(t) = A\cos 3t + B\sin 3t - \frac{5}{16}\cos 5t \quad \boxed{\text{1 point}}$$

$i(0) = A - \frac{5}{16} = 0 \Longrightarrow A = \frac{5}{16}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\frac{di}{dt} = -3A\sin 3t + 3B\cos 3t + \frac{25}{16}\sin 5t$

$\frac{di}{dt}(0) = 0 \Longrightarrow B = 0$ $\boxed{\text{1 point}}$ la solution particulière est donc

$$i(t) = \frac{5}{16}\left(\cos 3t - \cos 5t\right) \quad \boxed{\text{1 point}}$$

**Exercice 3 (20 points)** : Calculer l'intégrale :

$$I(x) = \int \frac{3x+2}{1-x^2}dx$$

déduire

$$J(t) = \int \frac{3\cos t + 2}{\sin t}dt$$

*Solution 3*

1. Calcul de $I(x)$

Première méthode :

On décompose la fonction en fractions simples :

$$\frac{3x+2}{1-x^2} = -\frac{5}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} \quad \boxed{\text{5 points}}$$

Donc $I(x) = \frac{5}{2}\int \frac{dx}{1-x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x} = -\frac{5}{2}\ln|1-x| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$

$$I(x) = -\frac{5}{2}\ln|1-x| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C \quad \boxed{\text{5 points}}$$

Deuxième méthode :

$$\int \frac{3x+2}{1-x^2}dx = \int \frac{3x}{1-x^2}dx + \int \frac{2}{1-x^2}dx$$

$$\begin{aligned}\int \frac{3x}{1-x^2}dx &= -\frac{3}{2}\int \frac{-2x}{1-x^2}dx \\ &= -\frac{3}{2}\ln|1-x^2| + C_1 \\ &= -\frac{3}{2}\ln|1-x| - \frac{3}{2}\ln|1+x| + C_1\end{aligned}$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(1-x)}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-x^2}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x} \\ &= \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + C_2\end{aligned}$$

Soit $I(x) = -\frac{3}{2}\ln|1-x| - \frac{3}{2}\ln|1+x| + C_1 + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + C_2$

donc :

$$I(x) = -\frac{5}{2}\ln|1-x| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$$

2. Calcul de $J(t)$ :

Posons $\cos t = u$ $\boxed{\text{1 point}}$

$$\Longrightarrow -\sin t dt = du \Longrightarrow dt = -\frac{du}{\sin t} = -\frac{du}{\sqrt{1-\cos^2 t}} = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

$$\frac{3\cos t + 2}{\sin t}dt = \frac{3\cos t + 2}{\sqrt{1-\cos^2 t}}dt = \frac{3u+2}{\sqrt{1-u^2}}\left(-\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\right) = -\frac{3u+2}{1-u^2}du \quad \boxed{\text{3 points}}$$

$$J(t) = \int \frac{3\cos t + 2}{\sin t}dt = -\int \frac{3u+2}{1-u^2}du \quad \boxed{\text{2 points}}$$

$$= -I(u) = \frac{5}{2}\ln|1-u| + \frac{1}{2}\ln|1+u| + C$$

$$J(t) = \frac{5}{2}\ln|1-\cos t| + \frac{1}{2}\ln|1+\cos t| + C \quad \boxed{\text{2 points}}$$

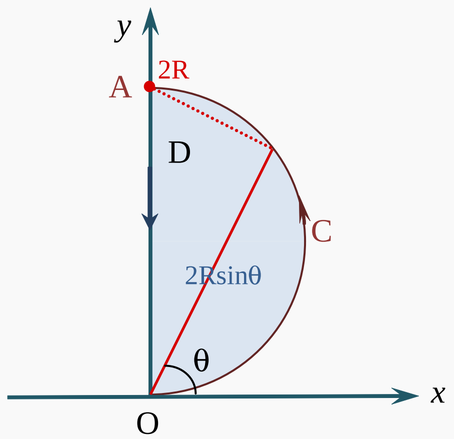
**Exercice 4 (35 points)** Dans le plan $(xOy)$ on considère le demi- disque **homogène** $(D)$ d'équation :

$$x^2 - 2Ry + y^2 \leq 0 \ \text{ et } x \geq 0$$

on désigne par $(C)$ la courbe fermée frontière de $(D)$

1. Le disque est chargé avec une densité de charge $\rho(x,y) = xy$ Calculer sa charge totale.
2. Calculer le moment d'inertie de $(D)$ en sa rotation par rapport à l'axe $Ox$, à l'axe $Oy$ et par rapport à l'axe $Oz$.donner les expressions en fonction de la masse.
3. On définit sur $(C)$ le champ des vecteurs $\overrightarrow{H}(x,y) = \overrightarrow{i} + \sqrt{x^2+y^2}\,\overrightarrow{j}$.
   (a) $\overrightarrow{H}(x,y)$ est -il un champ conservatif.
   (b) Calculer le travail $W$ de $\overrightarrow{H}$ effectué le long de $(C)$ parcouru dans le sens positif
   (c) Peut-on utiliser la formule Green Riemann. Si oui recalculer $W$

*Solution 4*




1. La charge d'un élément de surface $dxdy$ est $dQ = \rho dxdy$

   La charge totale est $Q = \iint_D \rho dxdy = \iint xydxdy$ $\boxed{\text{2 points}}$

   en coordonnées polaires : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ alors $dxdy = rdrd\theta$, et $xy = r^2\cos\theta\sin\theta$

   Sur $(D)$ on a : $\begin{cases} 0 \leq r \leq 2R\sin\theta \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

   Donc :

$$Q = \iint_{\Delta} r^3 \cos\theta \sin\theta dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left( \int_0^{2R\sin\theta} r^3 \cos\theta \sin\theta dr \right) d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2} \left( \frac{r^4}{4} \cos\theta \sin\theta \right)_0^{2R\sin\theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} \left( \frac{16R^4}{4} \sin^5\theta \cos\theta \right) d\theta$$
$$= 4R^4 \left. \frac{\sin^6\theta}{6} \right|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3} R^4 \boxed{\text{5 points}}$$

2. $(D)$ est homogène donc sa densité de masse $(\sigma)$ est constante $\forall M \in D$.
L'aire du disque est $\pi R^2$ alors sa masse totale est $m = \sigma \pi R^2$
Le moment d'inertie d'un élément de masse par rapport à un axe $\Delta$ est
$$dI_{\Delta} = \lambda^2 dm = \lambda^2 \sigma dx dy$$
donc
$$I_{\Delta} = \iint_{\Delta} \lambda^2 \sigma dx dy$$
– Si $ox$ est l'axe de rotation alors $\lambda = y$ et $I_x = \iint_D y^2 \sigma dx dy$

en coordonnées polaires :
$$I_x = \sigma \iint_{\Delta} r^3 \sin^2\theta dr d\theta = \sigma \int_0^{\pi/2} \left( \int_0^{2R\sin\theta} r^3 \sin^2\theta dr \right) d\theta$$
$$= \sigma \int_0^{\pi/2} \left. \frac{r^4}{4} \sin^2\theta \right|_0^{2R\sin\theta} d\theta = \sigma \int_0^{\pi/2} \frac{16R^4}{4} \sin^6\theta d\theta$$
$$= 4\sigma R^4 \int_0^{\pi/2} \sin^6\theta d\theta = \frac{5}{8} \pi R^4 \sigma = \frac{5}{8} m R^2 \boxed{\text{5 points}}$$

– Si $oy$ est l'axe de rotation alors $\lambda = x$ et $I_y = \iint_D x^2 \sigma dx dy$

en coordonnées polaires :
$$I_y = \sigma \iint_{\Delta} r^3 \cos^2\theta dr d\theta = \sigma \int_0^{\pi/2} \left( \int_0^{2R\sin\theta} r^3 \cos^2\theta dr \right) d\theta$$
$$= \sigma \int_0^{\pi/2} \left. \frac{r^4}{4} \cos^2\theta \right|_0^{2R\sin\theta} d\theta = 4\sigma R^4 \int_0^{\pi/2} \sin^4\theta \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{8} \pi \sigma R^4 = \frac{1}{8} m R^2 \boxed{\text{5 points}}$$

– Si $oz$ est l'axe de rotation alors $\lambda = r$
$$\Longrightarrow I_z = I_x + I_y = \frac{5}{8} m R^2 + \frac{1}{8} m R^2 = \frac{3}{4} R^2 m \boxed{\text{3 points}}$$

3. $\overrightarrow{H}(x,y) = \overrightarrow{i} + \sqrt{x^2+y^2}\,\overrightarrow{j}$.

(a) $\dfrac{\partial 1}{\partial y} = 0 \neq \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Alors $\overrightarrow{H}(x,y)$ n'est pas un champ conservatif. $\boxed{\text{3 points}}$

(b) $W = \oint_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} + \int_{AO} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr}$

$\overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = dx + \sqrt{x^2+y^2} dy$

Sur $(C)$ :

en coordonnées polaires : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = r = 2R\sin\theta$

$$\begin{cases} x = 2R\sin\theta\cos\theta = R\sin 2\theta \\ y = 2R\sin^2\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dx = 2R\cos 2\theta d\theta \\ dy = 4R\cos\theta\sin\theta d\theta \end{cases}$$

$\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr} = (2R\cos 2\theta d\theta) + 8R^2\cos\theta\sin^2\theta d\theta$

$= \left(2R\cos 2\theta + 8R^2\cos\theta\sin^2\theta\right) d\theta$

$$W = \int_C \overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(2R\cos 2\theta + 8R^2\cos\theta\sin^2\theta\right) d\theta = \frac{8}{3}R^2 \boxed{\text{5 points}}$$

Sur $AO$ : $x = dx = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr} = ydy$

$$\int_{AO} \overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr} = \int_{2R}^{0} ydy = -2R^2$$

$$W = \frac{8}{3}R^2 - 2R^2 = \frac{2}{3}R^2$$

(c) $\overrightarrow{H}$ est continue sur $(C)$ ,et dans $(D)$ donc on peut utiliser la formule Green Riemann $\boxed{\text{2 points}}$

$$W = \oint_C \overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr} = \iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

En coordonnées polaires : $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \dfrac{r\cos\theta}{r}rdrd\theta = r\cos\theta drd\theta$

$$W = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2R\sin\theta} r\cos\theta dr\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{r^2}{2}\cos\theta\Big|_0^{2R\sin\theta} d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{4R^2}{2}\sin^2\theta\cos\theta d\theta = \frac{2}{3}R^2 \boxed{\text{5 points}}$$

**On donne :**

$$\int \sin^4\theta\cos^2\theta d\theta = \frac{1}{16}\theta - \frac{1}{64}\sin 2\theta - \frac{1}{64}\sin 4\theta + \frac{1}{192}\sin 6\theta$$

$$\int \sin^6\theta d\theta = \frac{5}{16}\theta - \frac{15}{64}\sin 2\theta + \frac{3}{64}\sin 4\theta - \frac{1}{192}\sin 6\theta$$

$$\int \cos^6\theta d\theta = \frac{5}{16}\theta + \frac{15}{64}\sin 2\theta + \frac{3}{64}\sin 4\theta + \frac{1}{192}\sin 6\theta$$

$$\int \sin^2\theta\cos 2\theta d\theta = -\frac{1}{4}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta - \frac{1}{16}\sin 4\theta$$

$$\int \sin^2\theta\sin 2\theta d\theta = \frac{1}{16}\cos 4\theta - \frac{1}{4}\cos 2\theta$$

$$\int \cos^2\theta\sin 2\theta d\theta = -\frac{1}{4}\cos 2\theta - \frac{1}{16}\cos 4\theta$$

$$\int \cos^2\theta\cos 2\theta d\theta = \frac{1}{4}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{1}{16}\sin 4\theta$$