Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Mathématiques pour les Électriciens (LB203)

Examen Final 2014-2015-Semestre I

Solutions

Exercice 1 (25 points) : On considère l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + 2y = 8x^2 \qquad (E)$$

1. Déterminer $y_g(x)$ la solution générale de l'équation sans second membre associée à (E) .
2. Déterminer $y_p(x)$ une solution particulière de (E).
3. Déduire $y(x)$ la solution générale de (E) .
4. Déterminer $y_1(x)$ la solution de (E) telle que $y_1(0) = 0$ et $y_1'(0) = 0$.

Solution 1

1. L'équation homogène associée à (E) est : $y'' + 2y' + 2y = 0$
   Son équation caractéristique est : $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 = -4 < 0$ $\boxed{\text{2 points}}$
   les racines de l'équation caractéristique sont donc complexes
   Soit $j = \sqrt{-1} \iff j^2 = -1$, par suite $\Delta = -4 = 4j^2$
   les racines sont $\lambda_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 2j}{2} = -1 \pm j$ $\boxed{\text{2 points}}$
   Soit :
   $$y_g(x) = e^{-x}(A\cos x + B\sin x) \quad \boxed{\text{2 points}}$$

2. $m = 0$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique, alors la solution à chercher est de la forme $y_p = ax^2 + bx + c$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $y_p' = 2ax + b$ et $y_p'' = 2a$ $\boxed{\text{2 points}}$
   On a $y'' + 2y' + 2y = 8x^2$
   donc : $(2a) + 2(2ax + b) + 2\left(ax^2 + bx + c\right) = 8x^2 \iff ax^2 + (2a + b)x + a + b + c = 4x^2$
   En identifiant les coefficients on trouve :
   $$\begin{cases} a = 4 \\ 2a + b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 4 \\ b = -8 \\ c = 4 \end{cases} \boxed{\text{3 points}}$$
   $$y_p(x) = 4\left(x^2 - 2x + 1\right) \boxed{\text{1 point}}$$

3. La solution générale de (E) est $y(x) = y_g + y_p$ soit :
   $$y(x) = e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + 4\left(x^2 - 2x + 1\right) \boxed{\text{2 points}}$$

4. $y(0) = A + 4 = 0 \implies A = -4$ $\boxed{\text{1 point}}$
   $y'(x) = -e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + e^{-x}(-A\sin x + B\cos x) + 4(2x - 2)$
   $= ((-A + B)\cos x - (A + B)\sin x)e^{-x} + 4(2x - 2)$

$y'(0) = -A + B - 8 = 0 \Longrightarrow B = A + 8 = 4$ $\boxed{\text{3 points}}$

Finalement

$$y_1 = 4e^{-x}(-\cos x + \sin x) + 4\left(x^2 - 2x + 1\right) \boxed{\text{3 points}}$$

Exercice 2 (20 points) On considère l'équation différentielle suivante :

$$xy' - 2y = 4x^3\sqrt{y}$$

dont $y = y(x)$ est la solution générale.

1. En introduisant la fonction $z(x) = \sqrt{y}$, montrer que z vérifie :

$$xz' - z = 2x^3 \tag{E_1}$$

2. Déterminer la solution générale de (E_1).
3. Déduire $y(x)$.

Solution 2

1. C'est une équation de Bernouilli,
en divisant les deux membres par $\sqrt{y}$ on obtient :

$$xy'y^{-1/2} - 2y^{1/2} = 4x^3 \boxed{\text{2 points}}$$

$z = y^{1/2}$ donc $z' = \dfrac{1}{2}y'y^{-1/2}$ soit donc $y'y^{-1/2} = 2z'$ $\boxed{\text{2 points}}$

Substituons dans (1) : $2xz' - 2z = 4x^3$ ou bien

$$xz' - z = 2x^3 \boxed{\text{1 point}} \tag{1}$$

2. L'équation (2) est linéaire du premier ordre.

(a) L'ESSM : $xz' - z = 0 \Longleftrightarrow x\dfrac{dz}{dx} = z \Longleftrightarrow \dfrac{dz}{z} = \dfrac{dx}{x}$ $\boxed{\text{2 points}}$

intégrons les deux membres : $\ln z = \ln x + C = \ln kx$ soit $z_1 = kx$ $\boxed{\text{2 points}}$

(b) Pour l'EASM : on suppose $k = k(x)$

$z_2 = k(x)\,x$ $\boxed{\text{2 points}}$ $\Longrightarrow z_2' = k'x + k$ $\boxed{\text{2 points}}$

$xz_2' - z_2 = 2x^3 \Longrightarrow x(k'x + k) - kx = 2x^3 \Longrightarrow k' = 2x$ soit $k = x^2$ $\boxed{\text{2 points}}$

alors $z_2 = x^3$, par suite :

$$z = z_1 + z_2 = kx + x^3 \boxed{\text{2 points}}$$

3. On a $z = \sqrt{y}$ donc $y = z^2$, soit

$$y = \left(kx + x^3\right)^2 = x^2\left(k + x^2\right)^2 \boxed{\text{3 points}}$$

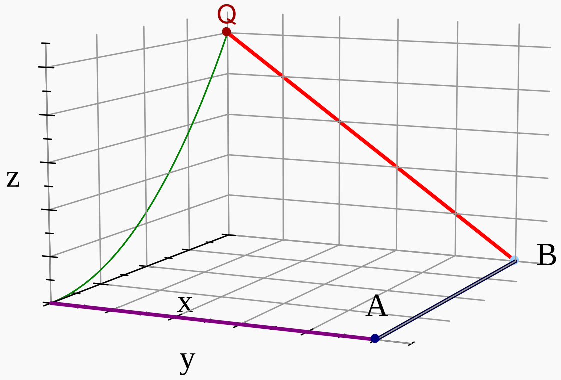
Exercice 3 (30 points) Soit le champ vectoriel :

$$\overrightarrow{F} = (x - z)\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + \beta x\,\overrightarrow{k}$$

1. Calculer $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ et $\vec{\nabla} \times \vec{F}$
2. Calculer le travail de $\vec{F}$ le long des chemins Γ_i, allant de O à $Q(-2, 0, 1)$ dans le sens positif, lorsque :
   (a) Γ_1 est l'arc de parabole située dans le plan xoz d'équation $4z = x^2$
   (b) Γ_2 est la ligne brisée $OABQ$; $A\,(0, 1, 0)\,, B\,(-2, 1, 0)$
3. Pour quelle valeur de β le travail de $\vec{F}$ ne dépend-il que des extrémités du chemin ?
4. Quel est alors le travail le long d'un chemin allant de O à Q?

Solution 3

1. $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{F} = -(\beta + 1)\,\vec{j}$ $\boxed{\text{4 points}}$
2. $W_{\Gamma_i} = \int\limits_{\Gamma_i} \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int\limits_{\Gamma_i} (x - z)\,dx + ydy + \beta xdz$ $\boxed{\text{2 points}}$



(a) Sur Γ_1 : $\begin{cases} y = 0 & \Longrightarrow dy = 0 \\ z = \dfrac{x^2}{4} & \Longrightarrow dz = \dfrac{1}{2}xdx \end{cases}$ $\boxed{\text{3 points}}$

$$\vec{F} \cdot \vec{dr} = (x - z)\,dx + ydy + \beta xdz = \left(x - \frac{x^2}{4}\right)dx + \frac{1}{2}\beta x^2 dx = \left(x + \frac{1}{2}\left(\beta - \frac{1}{2}\right)x^2\right)dx$$

En allant de O à Q : x varie de 0 à -2

$$W_{\Gamma_1} = \int_0^{-2} \left(x + \frac{1}{2}\left(\beta - \frac{1}{2}\right)x^2\right)dx = \frac{8}{3} - \frac{4}{3}\beta \ \boxed{\text{3 points}}$$

(b) $\Gamma_2 = [OA] \cup [AB] \cup [BQ]$

i) Sur $[OA]$: $x = z = 0$ donc $\vec{F} \cdot \vec{dr} = ydy$ par suite $W_{OA} = \int_0^1 ydy = \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{2 points}}$

ii) Sur $[AB]$: $A\,(0, 1, 0)\,, B\,(-2, 1, 0)$ on a $y = 1$ et $z = 0$ donc $dy = dz = 0$

$\vec{F} \cdot \vec{dr} = xdx$ et $W_{AB} = \int_0^{-2} xdx = 2$ $\boxed{\text{3 points}}$

iii) Sur $[BQ]$: $x = -2 \Longrightarrow dx = 0$ et $y + z = 1 \Longleftrightarrow z = 1 - y \Longrightarrow dz = -dy$

$\vec{F} \cdot \vec{dr} = ydy - 2\beta dz = (y + 2\beta)\,dy$

$W_{BQ} = \int_1^0 (y + 2\beta)\,dy = -2\beta - \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{3 points}}$

$$W_{\Gamma_2} = W_{OA} + W_{AB} + W_{BQ} = \frac{1}{2} + 2 - 2\beta - \frac{1}{2} = 2 - 2\beta \ \boxed{\text{2 points}}$$

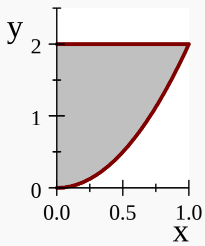
3. le travail de $\overrightarrow{F}$ ne dépend-il que des extrémités du chemin s'il est un champ conservatif c'est-à-dire si $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$, donc pour $\beta = -1$ $\boxed{\text{5 points}}$
4. Pour $\beta = -1$, le travail de $\overrightarrow{F}$ est indépendant du trajet, et donc :
$$W_{OQ} = (2-2\beta)_{\beta=-1} = \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{3}\beta\right)_{\beta=-1} = 4 \boxed{\text{3 points}}$$

Exercice 4 (25 points) On considère le domaine D limité par la branche parabolique $y = 2x^2$, l'axe $y'Oy$ et la droite $y = 2$ avec $x \geq 0$

1. Le domaine (D) est chargé avec une densité surfacique de charge $\rho(x,y) = x - 3y^2$. Calculer la charge totale de D
2. Calculer le volume du solide de base D de couvert $z = x + 2y$
3. Calculer le moment d'inertie de (D) en sa rotation autour de Oy.

Solution 4

1. $Q = \iint\limits_D \rho dxdy = \iint\limits_D (x - 3y^2)\, dxdy$ $\boxed{\text{2 points}}$



Fixons x : dans (D) les valeurs de y varient de $y_m = 2x^2$ à $y_M = 2$ pour $0 \leq x \leq 1$ $\boxed{\text{3 points}}$

Donc $Q = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{2x^2}^2 (x - 3y^2)\, dy\right) dx = \int\limits_0^1 (xy - y^3)_{2x^2}^2\, dx$

$= \int\limits_0^1 \left(x\left(2 - 2x^2\right) - \left(8 - 8x^6\right)\right) dx = \int\limits_0^1 \left(8x^6 - 2x^3 + 2x - 8\right) dx$

$= \frac{8}{7}x^7 - \frac{1}{2}x^4 + x^2 - 8x\Big|_0^1 = -\frac{89}{14}$ $\boxed{\text{5 points}}$

2. $V = \iint\limits_D zdxdy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{2x^2}^2 (x + 2y)\, dy\right) dx = \int\limits_0^1 (xy + y^2)_{2x^2}^2\, dx$ $\boxed{\text{4 points}}$

$= \int\limits_0^1 \left(-4x^4 - 2x^3 + 2x + 4\right) dx = \frac{37}{10}$ $\boxed{\text{3 points}}$

3. $I_\Delta = \iint\limits_D \lambda^2 \sigma dxdy$ où σ est la densité de masse et λ la distance d'un point $M \in D$ à l'axe Δ.

en sa rotation autour de Oy : $\lambda = x$

$I_y = \sigma \iint\limits_D x^2 dxdy = \sigma \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{2x^2}^2 x^2 dy\right) dx = \sigma \int\limits_0^1 x^2\left(2 - 2x^2\right) dx$ $\boxed{\text{4 points}}$

$= 2\sigma\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)_0^1 = 2\sigma\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{4\sigma}{15}$ $\boxed{\text{4 points}}$