Mathématiques pour les Électriciens (LB203)

Examen Final 2015-2016 **Durée : 2h :00**

SOLUTIONS

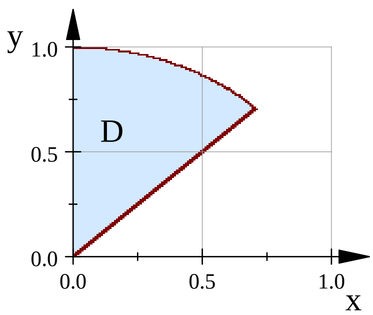
Exercice 1 (10 points) : **Vrai ou Faux, justifier.**
Chaque réponse correcte rapport 2 points, Chaque réponse incorrecte ou non justifiée enlève 1 point.

1. $\oint_C \sqrt{dx^2+dy^2}$ représente la longueur de la courbe (C)
2. Si $f = f(x,y,z)$ alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$
3. $\iiint_V dxdydz$ représente le volume de (V)
4. L'équation différentielle $y' = -2x$ admet pour solutions les fonctions $f(x) = ke^{-2x}$
5. Si $\overrightarrow{H}$ est un champ conservatif alors $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{0}$

Solution 1

1. VRAI $d\ell = \sqrt{dx^2+dy^2}$ est l'élément de longueur, $\ell = \oint_C d\ell$. $\boxed{\text{2 points}}$
2. FAUX Si ces dérivées partielles sont continues on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ $\boxed{\text{2 points}}$
3. VRAI : $dxdydz = dv$ est un élément de voulme, donc $V = \iiint_V dxdydz$ $\boxed{\text{2 points}}$
4. FAUX Les solutions sont $f(x) = x^2 + k$ $\boxed{\text{2 points}}$
5. VRAI Si $\overrightarrow{H}$ est un conservatif alors $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla}\varphi$, donc $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\nabla}\varphi = \overrightarrow{0}$. $\boxed{\text{2 points}}$

Exercice 2 (40 points) On désigne par (D) la portion du disque $x^2+y^2 \leq 1$ limitée par l'axe oy, la droite $y = x$, avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
On désigne par (C) la courbe frontière de (D)



1. On suppose que (D) est chargé avec une densité de charge $\sigma(x,y) = x$, calculer, Q, la charge totale de (D)

2. Calculer le volume du solide de base D de couvert $z = 1 - x^2 - y^2$
3. Une particule se déplace sur la courbe (C) sous l'action d'un champ de force $\overrightarrow{F} = x^2\overrightarrow{i} - y\overrightarrow{j}$. Calculer le travail effectué.
   (a) Par calcul direct
   (b) Par formule de Green-Riemann
4. $\overrightarrow{F}$ est-il un champ conservatif ?

Solution 2

1. La charge totale est $Q = \iint\limits_D \sigma dxdy = \iint\limits_D xdxdy$ $\boxed{\text{2 points}}$

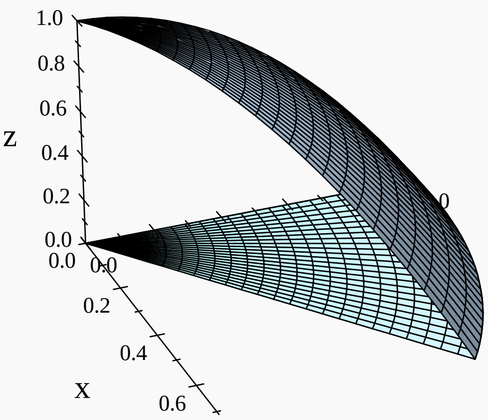
   (D) est une portion du disque donc on peut utiliser les coordonnées polaires (r, θ) :

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad dxdy = rdrd\theta \; \boxed{\text{2 points}}$$

La droite $y = x$ est la première bissectrice , alors sur (D) : $0 \le r \le 1$ et $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{2 points}}$

$$Q = \iint\limits_D xdxdy = \iint\limits_\Delta (r\cos\theta)\, rdrd\theta = \left(\int_0^1 r^2 dr\right)\left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\theta d\theta\right) \; \boxed{\text{2 points}}$$

$$= \left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^1\right)\left(\sin\theta|_{\pi/4}^{\pi/2}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{2} \; \boxed{\text{2 points}}$$



2.

$$V = \iint\limits_D zdxdy = \iint\limits_D (1 - x^2 - y^2)\, dxdy = \iint\limits_\Delta (1 - r^2)\, rdrd\theta \; \boxed{\text{2 points}}$$

$$= \left(\int_0^1 (r - r^3)\, dr\right)\left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\theta d\theta\right) \boxed{\text{3 points}}$$

$$= \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\Big|_0^1\right)\left(\sin\theta|_{\pi/4}^{\pi/2}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{8} \boxed{\text{2 points}}$$

3. $W = \oint\limits_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \oint\limits_C x^2dx - ydy$ 2 points

(a) Calcul direct

$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \Longrightarrow \oint\limits_C = \int\limits_{C_1} + \int\limits_{C_2} + \int\limits_{C_3}$ 1 point

▲ C_1 est le segment de la droite $y = x$

donc $dx = dy$ et $x^2dx - ydy = \left(x^2 - x\right) dx$ avec $0 \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ 2 points

$$W_1 = \int\limits_{C_1} = \int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \left(x^2 - x\right) dx = \frac{1}{12}\sqrt{2} - \frac{1}{4}$$ 2 points

▲ C_2 l'arc du cercle $x^2 + y^2 = 1$ tel que $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 2 points

$x^2dx - ydy = \cos^2\theta\,(-\sin\theta)\,d\theta - \sin\theta\cos\theta d\theta = \left(-\cos^2\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta\right) d\theta$ 2 points

$$W_2 = \int\limits_{C_2} = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \left(-\cos^2\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta\right) d\theta = \frac{\cos^3\theta}{3} + \frac{\cos^2\theta}{2}\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} = -\frac{1}{12}\sqrt{2} - \frac{1}{4}$$ 2 points

▲ C_3 le segment de l'axe oY; $x = 0$ donc $x^2dx - ydy = -ydy$ et y varie de 1 à 0 1 point

$$W_3 = \int\limits_{C_3} = -\int\limits_1^0 ydy = \frac{1}{2}$$ 1 point

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{1}{12}\sqrt{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12}\sqrt{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 0$$ 2 points

(b) Formule de Green-Riemann

$$\oint\limits_C x^2dx - ydy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x^2}{\partial y}\right) dxdy = 0$$ 3 points

4. On a $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{F}$ est conservatif, la courbe (C) est fermée alors $\oint\limits_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = 0$ 3 points

Exercice 3 (25 points) On demande de résoudre l'équation différentielle :

$$(x+1)\,y' + y = (x+1)\,e^x \tag{E}$$

par deux méthodes différentes :

1. Première méthode

   (a) Déterminer la solution générale de l'équation homogène.

   (b) Par variation de la constante trouver une solution particulière de (E).

   (c) Déduire la solution générale de (E).

2. Deuxième méthode

   En introduisant la variable $z = (x+1)\,y$, Déterminer la solution générale de (E)

3. Donner la solution particulière $y_1(x)$ telle que $y_1(0) = 0$

Solution 3

L'équation différentielle a un sens si $x \neq -1$

1. **Première méthode**

   (a) l'équation homogène : $(x+1)\,y' + y = 0 \Longleftrightarrow (x+1)\,\dfrac{dy}{dx} = -y$

   En séparant les variables : $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x+1}$ 2 points

   Intégrant les deux membres, on obtient : $\ln|y| = -\ln|x+1| + C = \ln\left|\dfrac{K}{x+1}\right|$ 3 points

   soit $y_g = \dfrac{K}{x+1}$ 1 point

   (b) On propose la solution particulière : $y_p = \dfrac{K_1(x)}{x+1}$ 1 point

   alors $y'_p = \dfrac{K'_1(x+1) - K_1}{(x+1)^2}$ 2 points

   $(x+1)\,y' + y = (x+1)\,e^x$

   $\Longrightarrow \dfrac{K'_1(x+1) - K_1}{(x+1)} + \dfrac{K_1}{x+1} = (x+1)\,e^x$ soit $K'_1 = (x+1)\,e^x$ 3 points

   $K_1 = \displaystyle\int (x+1)\,e^x dx = xe^x$ d'où $y_p = \dfrac{xe^x}{x+1}$ 2 points

   (c) La solution générale de (E) est $y(x) = y_g + y_p = \dfrac{K + xe^x}{x+1}$ 2 points

2. **Deuxième méthode**

   Soit $z = (x+1)\,y \Longrightarrow z' = (x+1)\,y' + y$ 1 point

   donc l'équation devient : $z' = (x+1)\,e^x$ 2 points

   Soit alors $z = \displaystyle\int (x+1)\,e^x dx = xe^x + C$ 2 points

   d'où $y = \dfrac{z}{x+1} = \dfrac{C + xe^x}{x+1}$ 2 points

3. $y(0) = C = 0$ soit $y_1(x) = \dfrac{xe^x}{x+1}$ 2 points

Exercice 4 (25 points) Soit l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + (1+\pi^2)\,y = \pi^2 e^x \qquad \textbf{(F)}$$

1. Trouver la solution générale de l'équation sans second membre.
2. Chercher une solution particulière de (F)
3. En déduire la solution générale de (F)

Solution 4

1. *ESSM* : $y'' - 2y' + (1+\pi^2)\,y = 0$

   l'équation caractéristique est : $\lambda^2 - 2\lambda + 1 + \pi^2 = 0$ 3 points

$\Delta = 4 - 4\left(1 + \pi^2\right) = -4\pi^2 = 4j^2\pi^2$, donc les racines sont $\lambda_{1,2} = \dfrac{2 \pm 2j\pi}{2} = 1 \pm j\pi$ $\boxed{\text{3 points}}$
La solution générale de l'ESSM est

$$y_g = e^x\left(A\cos\pi x + B\sin\pi x\right)\boxed{\text{4 points}} \tag{1}$$

2. $EASM : f(x) = \pi^2 e^x, m = 1$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique.
   On cherchera une solution particulière de la forme $y_p = \alpha e^x$ $\boxed{\text{3 points}}$
   $y_p' = \alpha e^x$ et $y_p'' = \alpha e^x$ $\boxed{\text{4 points}}$
   $y'' - 2y' + \left(1+\pi^2\right) y = \pi^2 e^x$
   $\Longrightarrow \alpha e^x - 2\alpha e^x + \left(1+\pi^2\right)\alpha e^x = \pi^2 e^x$ $\boxed{\text{2 points}}$
   En identifiant les coefficients de e^x on trouve :$\alpha = 1 \Longrightarrow y_p = e^x$ $\boxed{\text{1 points}}$
3. La solution générale de (F) est

$$y = y_g + y_p = y_g = e^x\left(A\cos\pi x + B\sin\pi x + 1\right)\boxed{\text{5 points}}$$