Institut Supérieur de Sciences Appliquées et Économiques
Centre du Liban associé au
Conservatoire National des Arts et Métiers

le cnam
Liban

Mathématiques pour les Électriciens (LB203)

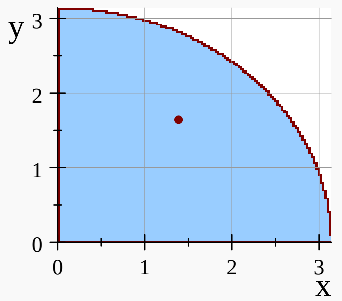
Examen Final 2016-2017 **Durée** **2h :00**

SOLUTIONS

Exercice 1 (25 points) Soit (D) la portion du disque $x^2+y^2 \leq \pi^2$ telle que $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Soit $\sigma(x,y) = x + 2y$ la densité surfacique de masse de (D).

1. Calculer la masse totale de (D).
2. Déterminer la position du centre de gravité de (D).
3. Calculer le moment d'inertie de (D) dans sa rotation autour de l'axe Oz.
4. Exprimer I_z en fonction de m

SOLUTION. 1



1. $m = \iint\limits_D \sigma dxdy = \iint\limits_D (x+2y)\, dxdy$ $\boxed{\text{1 point}}$

En coordonnées polaires : $\begin{cases} x = r\cos\theta & 0 \leq r \leq \pi \\ y = r\sin\theta & 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$, $dxdy = rdrd\theta$ $\boxed{\text{2 points}}$

$$m = \iint\limits_\Delta (r\cos\theta + 2r\sin\theta)\, rdrd\theta = \iint\limits_\Delta r^2(\cos\theta + 2\sin\theta)\, drd\theta$$

$$= \int_0^\pi \left(\int_0^{\pi/2} r^2 (\cos\theta + 2\sin\theta)\, d\theta \right) dr = \left(\int_0^\pi r^2 dr \right) \left(\int_0^{\pi/2} (\cos\theta + 2\sin\theta)\, d\theta \right) \boxed{\text{2 points}}$$

$$= \left(\frac{r^3}{3}\right)_0^\pi (\sin\theta - 2\cos\theta)_0^{\pi/2} = \left(\frac{\pi^3}{3}\right)(3) = \pi^3 \boxed{\text{2 points}}$$

2. Soit $G(X,Y)$ le centre de gravité de (D).

$$X = \frac{1}{m}\iint\limits_D x\sigma dxdy = \frac{6}{5\pi^3}\iint\limits_D (x^2+2xy)\, dxdy \boxed{\text{1 point}}$$

$$= \frac{1}{\pi^3}\iint\limits_\Delta (r^2\cos^2\theta + 2r^2\sin\theta\cos\theta)\, rdrd\theta = \frac{1}{\pi^3}\int_0^\pi \left(r^3 \int_0^{\pi/2} (\cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta)\, d\theta \right) dr \boxed{\text{1 point}}$$

$$= \frac{1}{\pi^3}\left(\int_0^\pi r^3 dr\right)\left(\int_0^{\pi/2} (\cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta)\, d\theta\right) = \frac{1}{\pi^3}\left(\int_0^\pi r^3 dr\right)\left(\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} + 2\sin\theta\cos\theta\right) d\theta\right)$$

$\boxed{\text{1 point}}$

$$= \frac{1}{\pi^3}\left(\frac{r^4}{4}\right)_0^{\pi}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{2}+\sin^2\theta\right)_0^{\pi/2} = \frac{1}{\pi^3}\left(\frac{\pi^4}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\pi+1\right) = \frac{1}{4}\pi\left(\frac{1}{4}\pi+1\right) \boxed{\text{2 points}}$$

$$Y = \frac{1}{m}\iint_D y\sigma dxdy = \frac{1}{\pi^3}\iint_D \left(xy+2y^2\right) dxdy \boxed{\text{1 point}}$$

$$= \frac{1}{\pi^3}\iint_\Delta \left(r^2\cos\theta\sin\theta+2r^2\sin^2\theta\right) rdrd\theta$$

$$= \frac{1}{\pi^3}\left(\int_0^{\pi} r^3 dr\right)\left(\int_0^{\pi/2}\left(\cos\theta\sin\theta+2\sin^2\theta\right)d\theta\right) \boxed{\text{1 point}}$$

$$= \frac{1}{\pi^3}\left(\int_0^{\pi} r^3 dr\right)\left(\int_0^{\pi/2}\left(\cos\theta\sin\theta+1-\cos 2\theta\right)d\theta\right) \boxed{\text{1 point}}$$

$$= \frac{1}{\pi^3}\left(\frac{r^4}{4}\right)_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}\sin^2\theta+\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}\pi\left(\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\right) \boxed{\text{2 points}}$$

$$G\left(\frac{1}{4}\pi\left(\frac{1}{4}\pi+1\right), \frac{1}{4}\pi\left(\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\right)\right)$$

3. $I_\Delta = \iint_D \lambda^2 \sigma dxdy = \iint_D \left(x^2+y^2\right)(x+2y)\, dxdy$

$$= \iint_\Delta r^2\left(r\cos\theta+2r\sin\theta\right) rdrd\theta = \iint_\Delta r^4\left(\cos\theta+2\sin\theta\right) drd\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} r^4\left(\cos\theta+2\sin\theta\right)d\theta\right)dr = \left(\int_0^{\pi} r^4 dr\right)\left(\int_0^{\pi/2}\left(\cos\theta+2\sin\theta\right)d\theta\right) = \frac{3}{5}\pi^5 \boxed{\text{5 points}}$$

4. On a $m = \pi^3 \Longrightarrow \dfrac{I_z}{m} = \dfrac{\frac{9}{20}\pi^5}{\pi^3} = \dfrac{9}{20}\pi^2 \Longrightarrow I_z = \dfrac{9\pi^2}{20}m$ $\boxed{\text{3 points}}$

Exercice 2 (15 points) On considère les intégrales

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx \quad et \quad J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$

1. En faisant le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$ montrer que $I = J$
2. Soit $K = I + J$, Calculer K et déduire I et J.

SOLUTION. 2

1. $x = \frac{\pi}{2} - t \Longrightarrow dx = -dt, x = 0 \to t = \frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2} \to t = 0$ $\boxed{\text{3 points}}$

$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \cos t \qquad \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \sin t$ $\boxed{\text{3 points}}$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx = \int_{\pi/2}^{0} \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}(-dt) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt = J \boxed{\text{3 points}}$$

2. $K = I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\pi/2} dx = x|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{3 points}}$

on $I = J$ donc $K = 2I \Longrightarrow I = J = \frac{1}{2} K = \frac{\pi}{4}$ $\boxed{\text{3 points}}$

Exercice 3 (20 points) Soit à calculer l'intégrale :

$$I = \int \frac{x^3}{1+x^2} dx$$

1. Montrer que $\frac{x^3}{1+x^2} = Ax + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ où A, B, C sont des réels à déterminer, puis calculer I
2. Calculer I en faisant un changement de varaible.
3. Déduire $J = \int \tan^3 t dt$.

SOLUTION. 3

1. Par décomposition en éléments simples :

$f(x) = Ax + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Longrightarrow A = 1, B = -1$ et $C = 0$

Soit $\frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}$ $\boxed{\text{3 points}}$

ou bien $\frac{x^3}{1+x^2} = \frac{x^3 + x - x}{1+x^2} = \frac{x(x^2+1) - x}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}$

$I = \int f(x) dx = \int x dx - \int \frac{x dx}{1+x^2}$

$= \int x dx - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2}$ $\boxed{\text{2 points}}$

$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C_1$ $\boxed{\text{2 points}}$

2. $I = \int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2 x}{1+x^2} dx$

posons $u = 1 + x^2$ donc $du = 2x dx \Longrightarrow x dx = \frac{1}{2} du$ et $x^2 = u - 1$ $\boxed{\text{2 points}}$

$I = \int \frac{(u-1)}{u} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = \frac{1}{2}(u - \ln u) + K$ $\boxed{\text{3 points}}$

$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + K = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C_1; C_1 = K + \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{3 points}}$

3. $u = \tan t \Longrightarrow du = (1 + \tan^2 t) dt \Longrightarrow dt = \frac{du}{1+u^2}$ $\boxed{\text{2 points}}$

$J = \int \tan^3 t dt = \int \frac{u^3}{1+u^2} du = I = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2} \ln(u^2+1) + C_2$ $\boxed{\text{1 point}}$

$= \frac{1}{2}(\tan^2 t - \ln(1 + \tan^2 t)) + C_2 = \frac{1}{2} \tan^2 t + \ln(\cos t) + C_2$ $\boxed{\text{2 points}}$

Exercice 4 (25 points) On considère l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 29y = xe^{2x} \qquad \textbf{(E)}$$

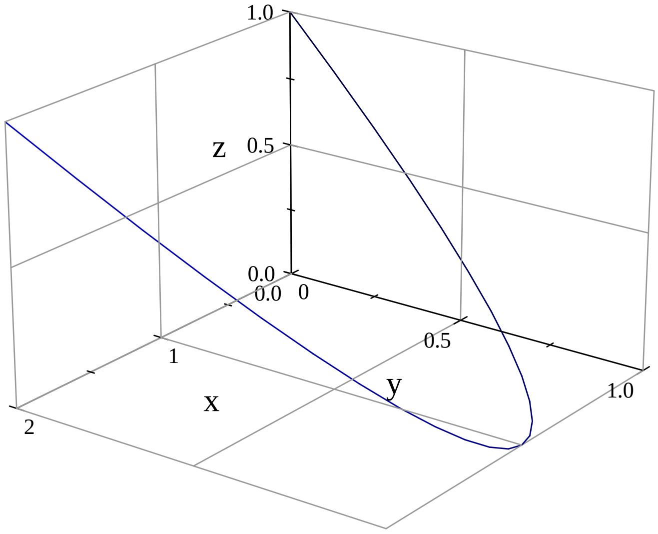
1. Déterminer y_g la solution générale de l'équation sans second membre.
2. Trouver y_p une solution particulière de l'équation avec second membre.
3. Donner la la solution générale de l'équation avec second membre.

SOLUTION. 4

1. ESSM : $y'' - 4y' + 29y = 0$ $\boxed{\text{1 point}}$
   l'équation caractéristique est : $\lambda^2 - 4\lambda + 29 = 0$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $\Delta = 16 - 4 \times 29 = -100 = 100j^2$ $\boxed{\text{2 points}}$
   Les racines sont complexes $\lambda_{1,2} = \dfrac{4 \pm 10j}{2} = 2 \pm 5j$ $\boxed{\text{2 points}}$
   d'où :
   $$y_g = e^{2x}\left(A\cos 5x + B\sin 5x\right) \quad \boxed{\text{3 points}}$$
2. Le second membre est $f(x) = xe^{2x}$, avec $m = 2$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique donc la solution particulière est $y_p = (ax+b)\,e^{2x}$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $y_p' = (a + 2ax + 2b)\,e^{2x} = (2ax + a + 2b)\,e^{2x}$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $y_p'' = (2a + 4ax + 2a + 4b)\,e^{2x} = 4(ax + a + b)\,e^{2x}$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $y'' - 4y' + 29y = xe^{2x} \Longrightarrow 4(ax + a + b)\,e^{2x} - 4(2ax + a + 2b)\,e^{2x} + 29(ax+b)\,e^{2x} = xe^{2x}$
   ou bien :
   $4ax + 4a + 4b - 8ax - 4a - 8b + 29ax + 29b = x$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $25b + 25ax = x \Longrightarrow b = 0$ et $a = \dfrac{1}{25}$ $\boxed{\text{2 points}}$
   Soit alors $y_p = \dfrac{1}{25}xe^{2x}$ $\boxed{\text{2 points}}$
3. $y = y_g + y_p = e^{2x}\left(A\cos 5x + B\sin 5x\right) + \dfrac{1}{25}xe^{2x} = e^{2x}\left(A\cos 5x + B\sin 5x + \dfrac{1}{25}x\right)$ $\boxed{\text{3 points}}$

Exercice 5 (15 points) On désigne par (C) la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x(t) = 1 + t \\ y(t) = 1 - t^2 \quad \text{pour } -2 < t < 2 \\ z(t) = t^2 \end{cases}$$



Soit $\overrightarrow{F} = x^2 \overrightarrow{i} - yz\overrightarrow{j} + xz\overrightarrow{k}$ un champ de forces défini et continue sur (C)

1. Calculer $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F}$. $\overrightarrow{F}$ est-il un champ conservatif, justifier
2. Calculer $W = \int\limits_{C+} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d\ell}$

SOLUTION. 5

1. $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F} = 2x - z + x = 3x - z$, $\boxed{\text{2 points}}$ $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} = y\overrightarrow{i} - z\overrightarrow{j}$ $\boxed{\text{3 points}}$
   $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} \neq \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{F}$ n'est pas un champ conservatif $\boxed{\text{2 points}}$
2. On a $\begin{cases} x(t) = 1 + t \Longrightarrow dx = dt \\ y(t) = 1 - t^2 \Longrightarrow dy = -2tdt \\ z(t) = t^2 \Longrightarrow dz = 2tdt \end{cases}$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d\ell} = x^2dx - yzdy + xzdz = (1+t)^2 dt - (1-t^2)\, t^2 (-2tdt) + (1+t)\, t^2 (2tdt)$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $= (1+t)^2 - (1-t^2)\, t^2 (-2t) + (1+t)\, t^2 (2t) = \left(-2t^5 + 2t^4 + 4t^3 + t^2 + 2t + 1\right) dt$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $W = \int\limits_{C+} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int\limits_{-1}^{1} \left(-2t^5 + 2t^4 + 4t^3 + t^2 + 2t + 1\right) dt = \dfrac{52}{15}$ $\boxed{\text{2 points}}$