Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

Mathématiques pour les Électriciens (LB203)

Examen Final Semestre II 2012-2013

Solution

Exercice 1 (30 points) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. La matrice A est-elle inversible ? Justifier.
3. Soit $B = A - I$ où I est la matrice unitaire, Calculer B, B^2 et B^3
4. Déterminer l'équation caractéristique de A et en déduire celle de B.
5. Montrer que B est inversible
6. Vérifier que $P_B(B) = O$ et déterminer B^{-1}.
7. Déduire la solution du système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{c} x - y + z = 1 \\ 4x - 3y + 2z = -1 \\ -2x + y - 2z = 2 \end{array} \right. \qquad (S)$$

Solution 1 :

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -A$ $\boxed{\text{3 points}}$

   $A^3 = A^2A = -AA = -A^2 = A$

   $A^4 = A^2A^2 = (-A)(-A) = A^2 = -A$ $\boxed{\text{1 point}}$

$$A^n = (-1)^{n+1} A = \left\{ \begin{array}{lll} -A & si & n = 2k \\ A & si & n = 2k+1 \end{array} \right. \boxed{\text{2 points}}$$

2. $\det(A) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$

   $\Longrightarrow A$ n'est pas inversible. $\boxed{\text{2 points}}$

3. $B = A - I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

   $B^2 = (A-I)^2 = A^2 - 2AI + I^2 = -A - 2A + I = -3A + I$

   $= -3 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -12 & 7 & -6 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

   $B^3 = B^2 B = (-3A + I)(A - I) = -3A^2 + 4AI - I^2$

   $= 3A + 4A - I = 7A - I$

   $= 7 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -7 & 7 \\ 28 & -15 & 14 \\ -14 & 7 & -8 \end{pmatrix}$

4. $P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 4 & -2-\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

   $= -\lambda^3 - \lambda^2 = -\lambda^2(\lambda + 1)$

   $P_B(\lambda) = |B - \lambda I| = |A - I - \lambda I| = |A - (\lambda+1) I|$

   $= -(\lambda+1)^2(\lambda+2) = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2$

5. On a $P_B(\lambda) = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2$

   $\Longrightarrow$ $\det(B) = -2 \neq 0 \Longrightarrow$ B est inversible

6. $P_B(B) = -B^3 - 4B^2 - 5B - 2I$

   $= -(7A - I) - 4(-3A + I) - 5(A - I) - 2I = O$

   $P_B \times B^{-1} = -B^2 - 4B - 5I - 2B^{-1} = O$

   $B^{-1} = \frac{1}{2}\left(-B^2 - 4B - 5I\right) = -\frac{1}{2}\left(B^2 + 4B + 5I\right)$

   $= -\frac{1}{2}\left(-3A + I + 4(A - I) + 5I\right) = -\frac{1}{2}A - I = -\frac{1}{2}(A + 2I)$

   $= -\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow (S) : BX = M$ avec $M = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   $\Longrightarrow X = B^{-1}M = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ -4 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\boxed{x = -\frac{7}{2}, \quad y = -4, \quad z = \frac{1}{2}}$$

Exercice 2 (25points) On désigne par $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ le rayon vecteur d'un point $M(x,y,z)$ de l'espace rapporté au système d'axes Ox, Oy, Oz et $r = \left|\overrightarrow{r}\right|$ et soit le champ des vecteurs :

$$\overrightarrow{H} = \frac{\overrightarrow{r}}{r^n+1}$$

1. Montrer que $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\dfrac{1}{r^n+1}\right) = -\dfrac{nr^{n-2}\overrightarrow{r}}{(r^n+1)^2}\ \forall n \in \mathbb{Z}$
2. Caculer $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H}$
3. $\overrightarrow{H}$ est-il un champ conservatif ?.Pourquoi ?
4. On considère le champ vectoriel :

$$\overrightarrow{F} = \frac{x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}}{x^2+y^2+z^2+1}$$

Déterminer $\varphi = \varphi(x,y,z)$ tel que $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{F} = \Delta\varphi$.

Solution 2 :

1. $\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\left(\dfrac{1}{r^n+1}\right) = -\dfrac{(r^n+1)'_\alpha}{(r^n+1)^2}$ où $\alpha = x,y,z$ respectivement

$r^n+1 = (x^2+y^2+z^2)^{n/2}+1$

$\dfrac{\partial}{\partial x}(r^n+1) = (n/2)(2x)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n-2}{2}} = nxr^{n-2}$ $\boxed{\text{2 points}}$

de même on aura : $\dfrac{\partial}{\partial y}(r^n+1) = nyr^{n-2}$ et $\dfrac{\partial}{\partial z}(r^n+1) = nzr^{n-2}$ $\boxed{\text{2 points}}$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r^n+1}\right) = -\frac{1}{(r^n+1)^2}\left(nxr^{n-2}\overrightarrow{i} + nyr^{n-2}\overrightarrow{j} + nzr^{n-2}\overrightarrow{k}\right)$$

$$= -\frac{nr^{n-2}}{(r^n+1)^2}\left(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}\right) = -\frac{nr^{n-2}\overrightarrow{r}}{(r^n+1)^2} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

2. $\overrightarrow{H} = \dfrac{\overrightarrow{r}}{r^n+1}$

1$^{\text{ère}}$méthode

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla}\cdot\frac{\overrightarrow{r}}{r^n+1} = \frac{\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{r}}{r^n+1} + \overrightarrow{\nabla}\left(\frac{1}{r^n+1}\right)\cdot\overrightarrow{r} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

$$= \frac{3}{r^n+1} - \frac{nr^{n-2}\overrightarrow{r}}{(r^n+1)^2}\cdot\overrightarrow{r} = \frac{3}{r^n+1} - \frac{nr^n}{(r^n+1)^2} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

$$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla}\times\frac{\overrightarrow{r}}{r^n+1} = \frac{\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{r}}{r^n+1} + \overrightarrow{\nabla}\left(\frac{1}{r^n+1}\right)\times\overrightarrow{r} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

$$= \frac{\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{r}}{r^n+1} - \frac{nr^{n-2}\overrightarrow{r}}{(r^n+1)^2}\times\overrightarrow{r} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{0} \text{ et } \vec{r} \times \vec{r} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{0} \boxed{\text{2 points}}$$

2$^{\text{ième}}$méthode $\vec{H} = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{r^n + 1}$

- $\dfrac{\partial}{\partial \alpha}\left(\dfrac{\alpha}{r^n + 1}\right) = \dfrac{r^n + 1 - n\alpha^2 r^{n-2}}{(r^n + 1)^2}$ où $\alpha = x, y, z$ respectivement

$$\operatorname{div} \vec{H} = \frac{r^n + 1 - nx^2 r^{n-2}}{(r^n + 1)^2} + \frac{r^n + 1 - ny^2 r^{n-2}}{(r^n + 1)^2} + \frac{r^n + 1 - nz^2 r^{n-2}}{(r^n + 1)^2} \boxed{\text{2 points}}$$

$$= \frac{3r^n + 3 - n\left(x^2 + y^2 + z^2\right) r^{n-2}}{(r^n + 1)^2} = \frac{3r^n + 3 - nr^n}{(r^n + 1)^2} = \frac{3 + (3 - n)\, r^n}{(r^n + 1)^2}$$

$\boxed{\text{2 points}}$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\beta}{r^n + 1}\right) = -\beta\frac{(r^n + 1)'_\alpha}{(r^n + 1)^2} = -\frac{n\alpha\beta}{(r^n + 1)^2} \text{ où } \alpha, \beta = x, y, z \text{ respectivement}$$

- $\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{x}{r^n + 1}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{z}{r^n + 1}\right) = -\dfrac{nxz}{(r^n + 1)^2}$ $\boxed{\text{2 points}}$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{r^n + 1}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r^n + 1}\right) = -\frac{nyz}{(r^n + 1)^2} \boxed{\text{1 points}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r^n + 1}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r^n + 1}\right) = -\frac{nxy}{(r^n + 1)^2} \boxed{\text{1 points}}$$

Finalement $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{0}$ $\boxed{\text{2 points}}$

3. On a $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{0}$ donc $\vec{H}$ est conservatif. $\boxed{\text{2 points}}$

4. $\vec{F} = \dfrac{\vec{r}}{r^2 + 1}$

   $\vec{F} \cdot \vec{dr} = \dfrac{\vec{r} \cdot \vec{dr}}{r^2 + 1}$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $d\varphi = \dfrac{rdr}{r^2 + 1}$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $\varphi = \displaystyle\int \frac{rdr}{r^2 + 1} = \frac{1}{2}\ln\left(r^2 + 1\right) + C$ $\boxed{\text{3 points}}$

Exercice 3 (25 points) On considère l'équation différentielle :

$$2y'' - 3y' + y = 2xe^x \qquad (E)$$

où $y = y(x)$.

1. Déterminer la solution générale de l'équation sans second membre.
2. Trouver une solution particulière de l'équation avec second membre.
3. Déduire la solution générale de l'équation (E)
4. Déterminer la solution vérifiant les conditions : $y(0) = y'(0) = 0$

Solution 3 :

1. ESSM : $2y'' - 3y' + y = 0$
   Equation caractéristique : $2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{3 \pm 1}{4} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1/2 \end{cases}$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $$y_g = C_1 e^{x/2} + C_2 e^x \;\boxed{\text{2 points}}$$

2. Le second membre est de la forme : $P(x)\, e^{mx}$ avec $P = 2x$ et $m = 1 = \lambda_1$
   La solution à chercher est $y_p = \left(ax^2 + bx\right) e^x$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $y_p' = \left(ax^2 + bx + 2ax + b\right) e^x = \left(ax^2 + (b + 2a)\, x + b\right) e^x$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $y_p'' = \left(ax^2 + (b + 2a)\, x + b + 2ax + b + 2a\right) e^x$
   $= \left(ax^2 + (4a + b)\, x + 2\,(a + b)\right) e^x$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $2y'' - 3y' + y = 2xe^x \Longrightarrow$
   $2\left(ax^2 + (4a + b)\, x + 2\,(a + b)\right) e^x - 3\left(ax^2 + (2a + b)\, x + b\right) e^x + \left(ax^2 + bx\right) e^x = 2xe^x$
   $(2a - 3a + a)\, x^2 + (8a + 2b - 6a - 3b + b)\, x + 4a + 4b - 3b = 2x$
   $2ax + 4a + b = 2x$
   Par identification on trouve :
   $\begin{cases} 2a = 2 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Longrightarrow a = 1 \text{ et } b = -4$ $\boxed{\text{2 points}}$
   d'où :
   $$y_p = \left(x^2 - 4x\right) e^x$$

3. La solution générale de l'équation (E) est $y = y_g + y_p$:
   $$y(x) = C_1 e^{x/2} + \left(x^2 - 4x + C_2\right) e^x \;\boxed{\text{2 points}}$$

4. $y(0) = C_1 + C_2 = 0$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $y'(x) = \dfrac{1}{2} C_1 e^{x/2} + \left(2x - 4 + x^2 - 4x + C_2\right) e^x$
   $y'(0) = \dfrac{1}{2} C_1 - 4 + C_2 = 0$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ \frac{1}{2} C_1 + C_2 = 4 \end{cases} \Longrightarrow C_1 = -8, C_2 = 8$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $$y(x) = -8e^{x/2} + \left(x^2 - 4x + 8\right) e^x \;\boxed{\text{3 points}}$$

Exercice 4 (20 points) On considère l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = y^3 - y \tag{F}$$

1. En effectuant un changement de variable, transformer (F) en une équation linéaire.
2. Résoudre l'équation linéaire ainsi obtenue.
3. Déduire la solution générale de (F) .

Solution 4 :

1. L'équation s'écrit : $y' + y = y^3$
   divisons par y^3 : $y'y^{-3} + y^{-2} = 1$
   Posons : $z = y^{-2} \Longrightarrow z' = -2y'y^{-3} \Longleftrightarrow y'y^{-3} = -\frac{1}{2}z'$
   on aura donc : $-\frac{1}{2}z' + z = 1$ soit
   $$\frac{1}{2}z' = z - 1 \boxed{\text{8 points}}$$
2. $\frac{1}{2}z' = z - 1 \Longleftrightarrow \frac{dz}{dx} = 2(z-1)$
   En séparant les variables : $\frac{dz}{z-1} = 2dx$
   $\int \frac{dz}{z-1} = 2\int dx$
   $\Longrightarrow \ln|z-1| = 2x + C$
   alors $z - 1 = e^{2x+C} = ke^{2x} \Longrightarrow z = ke^{2x} + 1 \boxed{\text{8 points}}$
3. On a $z = y^{-2} = \frac{1}{y^2} \Longrightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{z}}$
   Finalement
   $$y = \pm\frac{1}{\sqrt{ke^{2x}+1}} \boxed{\text{4 points}}$$