Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Mathématiques pour les Électriciens (LB203)

Examen Partiel 2014-2015-Semestre I **Durée : 1h :30**

Solutions

Exercice 1 (35 points) On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = 2A + I$$

où I est la matrice unitaire d'ordre 3.

1. Calculer A^n,et B^n $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. A et B sont-elles des matrices inversibles, calculer les matrices inverses où il est possible.
3. Calculer le polynôme caractéristique de B et vérifier que $P(B) = O$
4. Résoudre le système :

$$\begin{cases} 3x - 2y = 16 \\ 4x - 3y = 23 \\ 4x - 2y - z = 20 \end{cases}$$

Solution 1

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -A$ $\boxed{\text{4 points}}$

   $A^3 = A^2A = -AA = -A^2 = A$ $\boxed{\text{3points}}$

   Soit $A^n = (-1)^{n-1} A$ ou $A^n = \begin{cases} -A & si \quad n = 2k \\ A & si \quad n = 2k+1 \end{cases}$ $\boxed{\text{3 point}}$

   $B = 2A + I$
   $B^2 = (2A+I)^2 = 4A^2 + 4AI + I^2 = -4A + 4A + I = I$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $B^3 = B^2B = IB = B$ $\boxed{\text{1 point}}$

   d'où $B^n = \begin{cases} I & si \quad n = 2k \\ B & si \quad n = 2k+1 \end{cases}$ $\boxed{\text{2 points}}$

2. la matrice A, a la $2^{ième}$ ligne est le double de la première donc $|A| = 0$
   par suite A n'est pas inversible $\boxed{\text{2 points}}$

   $B = 2A + I = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

   $|B| = (-1)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(-9+8) = 1 \neq 0$ donc B est inversible $\boxed{\text{3 points}}$

   On a $B^2 = I \iff B^{-1}B^2 = B^{-1}I \Longrightarrow B = B^{-1}$ $\boxed{\text{2 points}}$

3. $P(\lambda) = |B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ 4 & -3-\lambda & 0 \\ 4 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix}$

$= -(1+\lambda)\left(-\left(9-\lambda^2\right)+8\right) = -(\lambda+1)\left(\lambda^2-1\right)$

$= -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1$ 5 points

$P(B) = -B^3 - B^2 + B + I = -B - I + B + I = O$ 3 points

4. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 16 \\ 23 \\ 20 \end{pmatrix}$ donc le système s'écrit : $BX = M$ 2 points

comme B est inversible, le système admet une solution unique :

$$X = B^{-1}M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 \\ 23 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Soit alors $\begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \\ z = -2 \end{cases}$ 3 points

Exercice 2 (35 points) Soit le champ vectoriel

$$\overrightarrow{H} = (2x+z)\,\overrightarrow{i} + \left(x^2 - y + xz - 1\right)\overrightarrow{j} + x\,\overrightarrow{k}$$

On considère le champ vectoriel $\overrightarrow{w} = \mu\overrightarrow{H}$, où $\mu = \mu(y)$.

1. Calculer $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}$, $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}\right)$
2. $\overrightarrow{H}$ est il un champ de gradient ? Justifier votre réponse
3. Trouver la fonction $\mu(y)$ telle que $\overrightarrow{W}$ soit un champ conservatif
4. Trouver la fonction $\varphi(x,y,z)$, potentiel de $\overrightarrow{w}$

Solution 2

1. $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = -x\,\overrightarrow{i} + (2x+z)\,\overrightarrow{k}$ 3 points

   $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} = 1$ 2 points $\quad \overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}\right) = 0$ 3 points

2. On a trouvé que $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = -x\,\overrightarrow{i} + (2x+z)\,\overrightarrow{k} \neq \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{H}$ n'est pas champ de gradient.
   2 points

3. Total 10 points

   soit $\mu = \mu(y) \Longrightarrow \overrightarrow{w} = \mu\left((2x+z)\,\overrightarrow{i} + \left(x^2 - y + xz - 1\right)\overrightarrow{j} + x\,\overrightarrow{k}\right)$

   $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{dr}$ est une différentielle totale si :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\mu(2x+z))}{\partial y} = \mu'(2x+z) = \dfrac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = \mu(2x+z) \\ \dfrac{\partial \mu x}{\partial x} = \mu = \dfrac{\partial(2\mu x + \mu z)}{\partial z} = \mu \\ \dfrac{\partial \mu x}{\partial y} = \mu' x = \dfrac{\partial \mu\left(x^2 - y + xz - 1\right)}{\partial z} = x\mu \end{cases}$$ 3 points

donc, il faut que : $\mu' = \mu$ $\boxed{2 \text{ points}}$

$\iff \dfrac{d\mu}{dy} = \mu \Longrightarrow \dfrac{d\mu}{\mu} = dy \Longrightarrow \mu = e^y$ $\boxed{3 \text{ points}}$

$$\overrightarrow{w} = (2x+z)\, e^y \overrightarrow{i} + \left(x^2 - y + xz - 1\right) e^y \overrightarrow{j} + xe^y \overrightarrow{k}\ \boxed{2 \text{ points}} \tag{1}$$

$\overrightarrow{w}$ est un champ de gradient

4. $\boxed{\text{Total 10 points}}$

$d\varphi = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{dr} \iff \overrightarrow{\nabla\varphi} = \overrightarrow{w}$

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = (2x+z)\, e^y \Longrightarrow \varphi(x,y,z) = \int (2x+z)\, e^y dx = \left(x^2 + zx\right) e^y + f(y,z)$ $\boxed{2 \text{ points}}$

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \left(x^2 + zx\right) e^y + \dfrac{\partial f}{\partial y} = \left(x^2 - y + xz - 1\right) e^y \Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y} = (-y-1)\, e^y$ $\boxed{2 \text{ points}}$

$f(y,z) = \int (-y-1)\, e^y dy = -ye^y + g(z)$ $\boxed{2 \text{ points}}$

$\varphi(x,y,z) = \left(x^2 + zx\right) e^y + f(y,z) = \left(x^2 + zx\right) e^y - ye^y + g(z)$

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = xe^y + \dfrac{dg}{dz} = xe^y \Longrightarrow \dfrac{dg}{dz} = 0 \Longrightarrow g = cte = k$ $\boxed{2 \text{ points}}$

$$\varphi(x,y,z) = \left(x^2 + zx - y\right) e^y + k\ \boxed{2 \text{ points}}$$

5. $\Delta\varphi = \overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla\varphi}\right) = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{w}$ $\boxed{2 \text{ points}}$

$= \dfrac{\partial}{\partial x}(2x+z)\, e^y + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - y + xz - 1\right) e^y + \dfrac{\partial}{\partial z} xe^y$ $\boxed{2 \text{ points}}$

$= 2e^y + \left(x^2 - y + xz - 1\right) e^y - e^y + 0 = \left(x^2 - y + xz\right) e^y$ $\boxed{1 \text{ point}}$

Exercice 3 (30 points) Soit a un réel positif, donné,

1. Calculer les intégrales :

$$I_a(x) = \int \frac{dx}{x^2 + ax} \quad \text{et } J(x) = \int \frac{x+1}{x^2+1} dx$$

2. En faisant un chagement convenable des variables déduire :

$$K = \int \frac{dx}{(\sin x + 3)\tan x} \quad \text{et } L = \int \frac{e^{2x} + e^x}{e^{2x} + 1} dx$$

Solution 3

1. Calcul de I et J

– On a : $\dfrac{1}{x^2 + ax} = \dfrac{1}{(x+a)\, x} = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a+x}\right)$ $\boxed{5 \text{ points}}$

$I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + ax} = \frac{1}{a}\left(\ln x - \ln(a+x)\right) = \frac{1}{a}\ln\frac{x}{x+a} + C$ $\boxed{5 \text{ points}}$

- $J(x) = \int \frac{x+1}{x^2+1} dx = \int \frac{xdx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1}$

  $= \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1}$ $\boxed{\text{5 points}}$

  $= \frac{1}{2} \ln\left(x^2+1\right) + \arctan x + C$ $\boxed{\text{5 points}}$

2. Calcul de K et L

- $K = \int \frac{dx}{(\sin x + 3)\tan x} = \int \frac{\cos x dx}{(\sin x + 3)\sin x}$

  on fait le chagement de variable : $u = \sin x \implies du = \cos x dx$

  $K = \int \frac{du}{(u+3)u} = I_3(\sin x) = \frac{1}{3} \ln \frac{\sin x}{\sin x + 3} + C$ $\boxed{\text{5 points}}$

- On a

  $L = \int \frac{e^{2x}+e^x}{e^{2x}+1} dx = \int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1} e^x d(x) = \int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1} d(e^x) = J(e^x)$ $\boxed{\text{3 points}}$

  $= \frac{1}{2} \ln\left(e^{2x}+1\right) + \arctan(e^x) + C$ $\boxed{\text{2 points}}$