Mathématiques pour les Électriciens (LB203)

Examen Partiel 2015-2016 **Durée : 1h :30**

SOLUTIONS

Exercice 1 (10 points) Vrai ou Faux, justifier.

Chaque réponse correcte rapport 1 points Chaque réponse incorrecte ou non justifiée enlève $\frac{1}{2}$ point

1. Le produit de deux fonctions à 2 variables est une fonction à 4 variables.
2. Les surfaces de niveaux de $f(M) = x^2 - 2xy + y^2$ sont des cercles centrés à l'origine.
3. Une fonction peut être continue mais non dérivable en un point.
4. Si deux fonctions ont la même dérivée sur un intervalle ouvert, elles sont égales.
5. $\lim\limits_{M \to M_0} (f(M) \times g(M)) = f(M_0) \times g(M_0)$
6. Si A et B sont deux matrices telles que $|A| = |B|$, alors $A = B$
7. Si $A_{2\times 3}$ et B_{3x2} alors $AB = BA$.
8. Si $A^3 = A$ alors $A^2 = A$
9. Si $|A| = 0$ alors la matrice adjointe n'existe pas
10. Si $|A| = 0$ alors A est inversible

SOLUTION 1

1. $\boxed{\text{FAUX}}$: $f(x;y) \times g(x,y) = h(x,y)$ $\boxed{\text{2 points}}$
2. $\boxed{\text{FAUX}}$: $f(M) = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 = k^2$, droites : $x - y = \pm k$ $\boxed{\text{2 points}}$
3. $\boxed{\text{VRAI}}$: On sait que la dérivabilité implique la continuité mais que la réciproque est fausse $\boxed{\text{2 points}}$
4. $\boxed{\text{FAUX}}$: L'égalité $f'(x) = g'(x)$ implique seulement que $f(x) - g(x)$ est constante sur cet intervalle $\boxed{\text{2 points}}$
5. $\boxed{\text{FAUX}}$: Sauf si f et g sont continues en M_0 $\boxed{\text{2 points}}$
6. $\boxed{\text{FAUX}}$: Par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A \neq I$ mais $|A| = |I| = 1$ $\boxed{\text{1 point}}$
7. $\boxed{\text{FAUX}}$: En générale le produit des matrices n'est pas commutatif, en particulier, la matrice AB est carrée d'ordre 2 tandis que la matrice BA est d'ordre 3 $\boxed{\text{1 point}}$
8. $\boxed{\text{FAUX}}$: Si $A^2 = I$ alors $A^3 = A$ $\boxed{\text{1 point}}$
9. $\boxed{\text{FAUX}}$: la matrice adjointe d'une matrice carrée toujours existe. $\boxed{\text{1 point}}$
10. $\boxed{\text{FAUX}}$: Si $|A| = 0$ alors A n'est pas inversible. $\boxed{\text{1 point}}$

Exercice 2 (40 points) On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \ B = A - I$$

où I est la matrice unité.

1. Calculer A^2, A^3, en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$ (5 *pts*)
2. Déduire alors B^n pour $n \in \mathbb{N}$ (5 *pts*)
3. Calculer, $P(\lambda)$ le polynôme caractéristique de A. Vérifier que $P(A) = O$ $(5 + 2 = 7$ *pts*$)$
4. Soit $Q(\lambda)$ le polynôme caractéristique de B.
   (a) En utilisant la relation entre A et B montrer que $Q(\lambda) = P(\lambda + 1)$ (3 pts)
   (b) Vérifier que $Q(B) = O$ (2 pts)
5. Les matrices A et B sont-elles inversibles. (4 pts)
6. Déterminer A^{-1} et B^{-1} si elles existent. En déduire, en fonction de A, sa matrice adjointe : $adj(A)$. (7 pts)
7. Déduire la solution du système d'équations linéaires : (7 pts)

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + z = 2 \\ -2x + 2y - z = 5 \end{cases}$$

SOLUTION 2

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $A^3 = A^2 A = IA = A$ $\boxed{\text{1 point}}$

   On déduit :

$$A^n = \begin{cases} I & si \quad n = 2k \\ A & si \quad n = 2k+1 \end{cases} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

2. $B^2 = (A - I)^2 = \left(A^2 - 2AI + I^2\right)$

   $= I - 2A + I = 2I - 2A = -2(A - I) = -2B$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $B^3 = B^2 \times B = -2B \times B = -2B^2 = (-2)^2 B$ $\boxed{\text{1 point}}$

   d'où :

$$\text{Pour } n \neq 0 : B^n = (-2)^{n-1} B \quad \boxed{\text{2 points}}$$

3. $P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1$ $\boxed{\text{5 points}}$

   $P(A) = -A^3 + A^2 + A - I = -A + I + A - I = O$ $\boxed{\text{2 points}}$

4. On a $B = A - I$ donc
$Q(\lambda) = |B - \lambda I| = |A - I - \lambda I| = |A - (\lambda+1) I| = P(\lambda+1)$ 2 points
$= -(\lambda+1)^3 + (\lambda+1)^2 + (\lambda+1) - 1 = -\lambda^3 - 2\lambda^2$ 2 points
$Q(B) = -B^3 - 2B^2 = -(-2)^2 B - 2(-2) B = -4B + 4B = O$ 1 point
5. D'après les ploynômes caractéristiques de A et B :
   - $|A| = -1 \neq 0$ donc A est inversible 2 points
   - $|B| = 0$ donc B n'est pas inversible 2 points
6. - B n'est pas inversible donc B^{-1} n'existe pas 1 point
   - A est inversible, et on a $A^2 = I$ donc $A^{-1} \times A^2 = A^{-1} \times I \Longrightarrow A = A^{-1}$. 3 points
   - Par définition $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A) \Longrightarrow adj(A) = |A| \times A^{-1}$ 2 points
   on a $|A| = -1$ et $A = A^{-1}$ par suite $adj(A) = -A$. 1 point
7. Sous forme matrcielle le système s'écrit : $AX = M$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ 1 point

   Puisque A est inversible et $A^{-1} = A$ alors on écrit :
   $X = A^{-1}M = AM =$
   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$ 3 points
   d'où : $x = 5, y = 6, z = -3$ 3 points

Exercice 3 (15 points) Calculer
$$I = \int \frac{x-3}{x^2-2x+2} dx$$

SOLUTION 3

$$\begin{aligned}
\frac{x-3}{x^2-2x+2} &= \frac{x-1}{x^2-2x+2} - \frac{2}{x^2-2x+2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{2(x-1)}{x^2-2x+2} - \frac{2}{x^2-2x+2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{2x-2}{x^2-2x+2} - \frac{2}{x^2-2x+2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{2x-2}{x^2-2x+2} - \frac{2}{x^2-2x+2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{2x-2}{x^2-2x+2} - \frac{2}{(x-1)^2+1}
\end{aligned}$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx - 2\int \frac{dx}{(x-1)^2+1}$$
$$= \frac{1}{2} \ln\left|x^2-2x+2\right| - 2\arctan(x-1) + C$$

Exercice 4 (35) On définit le champ vectoriel

$$\overrightarrow{H} = \frac{x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}}{x^2+y^2+z^2}$$

1. Calculer : $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}$
2. $\overrightarrow{H}$ dérive-t-il d'un potentiel scalaire ?. Justifier la réponse.
3. On désigne par $\overrightarrow{r} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$ le rayon vecteur d'un point $M(x,y,z)$ et $r = \|\overrightarrow{r}\|$ .Exprimer $\overrightarrow{H}$ en fonction de $\overrightarrow{r}$ et r.
4. Trouver le potentiel scalaire (s'il existe) associé à $\overrightarrow{H}$.

SOLUTION 4

1. Soit $\overrightarrow{H} = P\,\overrightarrow{i} + Q\,\overrightarrow{j} + R\,\overrightarrow{k}$

   (a) $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

   $$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)}\right) = \frac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

   $$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{x^2-y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

   $$\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

   $$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} = \frac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{x^2-y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

   (b) $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{-2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

   $$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)}\right) = \frac{-2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

   $$\Longrightarrow \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$

   de même $\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ $\boxed{\text{2 points}}$ Par suite : $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{0}$ $\boxed{\text{2 points}}$

2. $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{0}$ alors $\overrightarrow{H}$ dérive d'un potentiel scalaire. $\boxed{\text{2 points}}$

3. $\overrightarrow{H} = \frac{x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}}{(x^2+y^2+z^2)} = \frac{\overrightarrow{r}}{r^2}$ $\boxed{\text{5 points}}$

4. Soit $\varphi = \varphi(x,y,z)$ tel que $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla}\varphi$

   $\overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = \overrightarrow{\nabla}\varphi \cdot \overrightarrow{dr} = d\varphi$ $\boxed{\text{2 points}}$ $\Longrightarrow \frac{\overrightarrow{r}}{r^2} \cdot \overrightarrow{dr} = \frac{rdr}{r^2} = \frac{dr}{r} = d\varphi$ $\boxed{\text{2 points}}$

   pour $r \neq 0$: $\boxed{\text{1 point}}$ $\varphi = \int \frac{dr}{r} = \ln r + C = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\boxed{\text{5 points}}$