Institut Supérieur de Sciences Appliquées et Économiques
Centre du Liban associé au
Conservatoire National des Arts et Métiers
le cnam Liban

Mathématiques pour les Électriciens (LB203)

Examen Partiel 2016-2017 **Durée : 1h :30**

SOLUTION

Exercice 1 (10 points) Vrai ou Faux, justifier.

Chaque réponse correcte rapport 2 points, Chaque réponse incorrecte ou non justifiée enlève 1 point.

1. Si $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +1$ et $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -1$ alors f est continue au point $x = 0$.
2. Si $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ alors $\left(\frac{v}{u}\right)' = \frac{v^2}{u'v - uv'}$
3. Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n alors $(A - B)^2 = A^2 + B^2 - 2AB$
4. Si $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$ est le polynôme caractéristique d'une matrice A, alors est inversible.
5. Si $J : (x, y) \longrightarrow (u, v)$, $J = uv > 0$ alors $dxdy = uvdudv$

SOLUTION. 1

1. $\boxed{FAUX}$: f est continue au point $x = 0$ si $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = f(0)$.
2. $\boxed{FAUX}$: $\left(\frac{v}{u}\right)' = \frac{v'u - vu'}{u^2}$
3. $\boxed{FAUX}$: sauf si A et B commuttent, autrement $(A - B)^2 = A^2 + B^2 - AB - BA$.
4. $\boxed{VRAI}$: $\det(A) = 2 \neq 0$. donc A est inversible.
5. $\boxed{VRAI}$: $dxdy = |J|\, dudv = uvdudv$.

Exercice 2 (10 points) questions indépendantes :

1. Calculer les dérivées partielles f'_x et f'_y de la fonction $f(x, y) = x^{x+y}$.
2. Définir et représenter le domaine de définition de $f(x, y) = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\sqrt{y}}$.

SOLUTION. 2

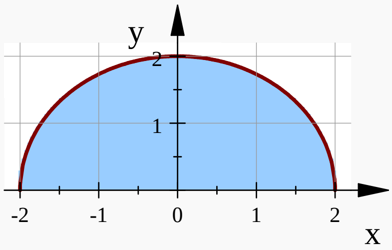
1. $\ln f = \ln\left(x^{x+y}\right) = (x + y)\ln x$ $\boxed{\text{1 point}}$

$$\frac{\partial \ln f}{\partial x} = \frac{\partial\left((x+y)\ln x\right)}{\partial x} \Longleftrightarrow \frac{f'_x}{f} = \ln x + \frac{x+y}{x}.$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = x^{x+y}\left(\ln x + \frac{x+y}{x}\right) = x^{x+y-1}(x + y + x\ln x) \boxed{\text{2 points}}$$

$$\frac{\partial \ln f}{\partial y} = \frac{\partial\left((x+y)\ln x\right)}{\partial y} \Longleftrightarrow \frac{f'_y}{f} = \ln x \Longrightarrow f'_y = x^{x+y}\ln x \boxed{\text{2 points}}$$

2. $f(x,y)$ est définie pour $y > 0$ et $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ donc pour $y > 0$ et $x^2 + y^2 \leq 4$, le domaine de définition est alors la partie supérieure du disque $x^2 + y^2 \leq 4$ $\boxed{3\ points}$, Figure $\boxed{2\ points}$



Exercice 3 (35 points) Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer :
   (a) $A + B$ et $A - B$
   (b) A^2, A^3, et en déduire $A^n, \forall n \in \mathbb{N}$
   (c) B^2, B^3 et en déduire $B^n, \forall n \in \mathbb{N}$
   (d) $|A|$ et $|B|$.
   (e) A^{-1} et B^{-1} si elles existent.
2. Calculer $P(\lambda)$ le polynôme caractéristique de B, Vérifier que $P(B) = O$, et retrouver B^{-1}, s'il est possible.
3. On considère le système d'équation linéaire :

$$\begin{cases} -4x + y + 2z = 11 \\ -3x + 2z = 10 \\ -6x + 2y + 3z = 16 \end{cases}$$

   (a) Ce système admet-il une solution unique.
   (b) Si oui, déterminer x, y et z.

SOLUTION. 3

1. (a) $$A + B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 5 \\ -5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \boxed{2\ points}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 7 & -2 & -2 \end{pmatrix} \boxed{2\ points}$$

(b) $$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \boxed{2\ points}$$

$$A^3 = A \times A^2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ *2 points*

donc $A^n = O, \forall n \geq 3$ *1 point*

(c) $B^2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ *2 points*

$B^3 = B^2 B = I \times B = B$ donc *1 point*

$$\forall n \in \mathbb{N} : B^n = \begin{cases} I & si \quad n = 2k \\ B & si \quad n = 2k+1 \end{cases}$$ *2 points*

(d) $|A| = \begin{vmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ et $|B| = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ -6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$ *4 points*

(e) $|A| = 0$, A n'est pas inversible. *1 point*

$|B| = 1 \neq 0$ donc B est inversible. *1 point*

puisque $B^2 = I$ alors $B^2 \times B^{-1} = I \times B^{-1} \Longrightarrow B = B^{-1}$ *2 points*

2. $P(\lambda) = |B - \lambda I| = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 2 \\ -3 & -\lambda & 2 \\ -6 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1$ *5 points*

On a $B^3 = B$ et $B^2 = I$.
donc : $P(B) = -B^3 - B^2 + B + I = -B - I + B + I = O$ *2 points*
$|B| = 1 \neq 0$ donc la matrice B est inversible
$P(B) \times B^{-1} = -B^2 - B + I + B^{-1} = O$
$B^2 = I$ donc $-B + B^{-1} = O \Longrightarrow B^{-1} = B$ *1 point*

3. Sous forme matricielle, le système s'écrit : $BX = M$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}$ *1 point*

La matrice B est inversible donc système admet une solution unique.

D'ou : $X = B^{-1}M = BM = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *1 point*

$x = -2, y = -1$ et $z = 2$ *3 points*

Exercice 4 (25 points) On considère la forme différentielle :

$$\omega = \left(4x^3y^4z^4 + 3x^2\right) dx + \left(4x^4y^3z^4 + 3y^2\right) dy + \left(4x^4y^4z^3 + 3z^2\right) dz$$

1. Montrer que ω est une différentielle totale.
2. Déterminer la fonction $f = f(x, y, z)$ telle que $\omega = df$.

SOLUTION. 4

1. on a :
   - $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 16x^3y^3z^4$ $\boxed{\textit{2 points}}$
   - $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x} = 16x^3y^4z^3$ $\boxed{\textit{2 points}}$
   - $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y} = 16x^4y^3z^3$ $\boxed{\textit{2 points}}$

   alors ω est une différentielle totale. $\boxed{\textit{1 point}}$
2. ω est une différentielle totale, donc il existe une fonction $f = f(x,y,z)$ telle que $\omega = df$ $\boxed{\textit{2 points}}$

   $P = \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3y^4z^4 + 3x^2 \Longrightarrow f = \int \left(4x^3y^4z^4 + 3x^2\right) dx = x^4y^4z^4 + x^3 + g(y,z)$ $\boxed{\textit{5 points}}$

   $\dfrac{\partial f}{\partial y} = Q \Longleftrightarrow 4x^4y^3z^4 + \dfrac{\partial g}{\partial y} = 4x^4y^3z^4 + 3y^2 \Longrightarrow \dfrac{\partial g}{\partial y} = 3y^2 \Longrightarrow g = y^3 + h(z)$ $\boxed{\textit{4 points}}$

   $f = x^4y^4z^4 + x^3 + y^3 + h(z)$ $\boxed{\textit{1 point}}$

   $\dfrac{\partial f}{\partial z} = R \Longleftrightarrow 4x^4y^4z^3 + h' = 4x^4y^4z^3 + 3z^2 \Longrightarrow h = z^3 + C$ $\boxed{\textit{3 points}}$

   Finalement :
   $$f(x,y,z) = x^4y^4z^4 + x^3 + y^3 + z^3 + C \quad \boxed{\textit{3 points}}$$

Exercice 5 (20 points) Soit le champs vectoriel

$$\overrightarrow{H} = (ay + 4xz - 6)\,\overrightarrow{i} + \left(x - 3bzy^2 - 2\right)\overrightarrow{j} + \left(cx^2 - y^3\right)\overrightarrow{k}$$

où a, b, c sont des constantes.

1. Calculer $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}$
2. Déterminer les constantes a, b, c telles que le champ $\overrightarrow{H}$ soit un champ de gradient.

SOLUTION. 5

1. $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 4z - 6bzy$ $\boxed{\textit{5 points}}$

   $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(-3y^2 + 3by^2\right)\overrightarrow{i} + (2cx - 4x)\,\overrightarrow{j} + (1-a)\,\overrightarrow{k}$ $\boxed{\textit{7 points}}$
2. Si $\overrightarrow{H}$ est un champ de gradient alors $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{0}$ $\boxed{\textit{3 points}}$

   donc $b = 1, c = 2$ et $a = 1$, dans ce cas on aura :
   $$\overrightarrow{H} = (y + 4xz - 6)\,\overrightarrow{i} + \left(x - 3zy^2 - 2\right)\overrightarrow{j} + \left(2x^2 - y^3\right)\overrightarrow{k} \quad \boxed{\textit{5 points}}$$