Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Mathématiques pour les Electriciens

Examen Partiel Semestre II 2012-2013

Lundi 27 Mai 2013 13h :00→15h :00

Solutions

Exercice 1 (40 points) On désigne par $\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ le rayon vecteur d'un point $M(x, y, z)$ et $r = \|\overrightarrow{r}\|$.

On définit le champ vectoriel

$$\overrightarrow{H_n} = r^n \overrightarrow{r}$$

où $n \in \mathbb{R}$

1. Calculer $\overrightarrow{\nabla r}$, $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{r}$ et $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{r}$
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{R}$: $\overrightarrow{\nabla r^n} = nr^{n-2}\overrightarrow{r}$
3. Calculer :
   (a) $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H_n}$
   (b) $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H_n}$
4. $\overrightarrow{H_n}$ dérive-t-il d'un potentiel scalaire ?. Justifier la réponse.
5. Trouver le potentiel scalaire (s'il existe) associé à $\overrightarrow{H_n}$.
6. Soit $\overrightarrow{W}$ un champ conservatif défini par :

$$\overrightarrow{W} = A\frac{x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

où A est une constante donnée.
Trouver le champ $\varphi = \varphi(M)$ tel que $\overrightarrow{\nabla}\varphi = \overrightarrow{W}$.

Solution 1 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$

1. $\overrightarrow{\nabla r} = \dfrac{\partial r}{\partial x}\overrightarrow{i} + \dfrac{\partial r}{\partial y}\overrightarrow{j} + \dfrac{\partial r}{\partial z}\overrightarrow{k}$ $\boxed{\text{2 points}}$

$\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2} = \dfrac{1}{2}(2x)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \dfrac{x}{r}$ $\boxed{\text{1 point}}$

de même : $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{r}$ et $\dfrac{\partial r}{\partial z} = \dfrac{z}{r}$ $\boxed{\text{2 points}}$

alors :

$$\overrightarrow{\nabla r} = \frac{x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}}{r} = \frac{\overrightarrow{r}}{r} \ \boxed{\text{1 point}}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 \ \boxed{\text{2 points}}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{r} = 3 \ \boxed{\text{1 point}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\vec{k} \ \boxed{\text{2 point}}$$

x, y, z sont des variables indépendantes alors :

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{0} \ \boxed{\text{2 points}}$$

2. $\vec{\nabla} r^n = n r^{n-1}\, \vec{\nabla} r = n r^{n-1} \dfrac{\vec{r}}{r} = n r^{n-2} \vec{r}$ $\boxed{\text{3 points}}$
3. $\vec{H} = r^n \vec{r}$
   (a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot (r^n \vec{r}) = \vec{\nabla} r^n \cdot \vec{r} + r^n \vec{\nabla} \cdot \vec{r}$ $\boxed{\text{3 points}}$
   $= n r^{n-2} \vec{r} \cdot \vec{r} + 3r^n = n r^{n-2} r^2 + 3r^n$
   Finalement :
   $$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = (n+3)\, r^n \ \boxed{\text{2 points}}$$
   (b) $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \times (r^n \vec{r}) = \vec{\nabla} r^n \times \vec{r} + r^n \vec{\nabla} \times \vec{r}$ $\boxed{\text{3 points}}$
   $= n r^{n-2} \dfrac{\vec{r}}{r} \times \vec{r} + r^n \left(\vec{\nabla} \times \vec{r}\right)$
   on a : $\vec{r} \times \vec{r} = \vec{0}$ et $\vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{0}$ alors :
   $$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{0} \ \boxed{\text{2 points}}$$
4. $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{0}$ alors il dérive d'un potentiel scalaire. $\boxed{\text{2 points}}$
5. Soit $f = f(M)$ tel que $\vec{\nabla} f = \vec{H} \Longrightarrow df = \vec{H} \cdot \vec{dr} = r^n \vec{r} \cdot \vec{dr} = r^n r dr = r^{n+1} dr$ $\boxed{\text{3 points}}$
   $f(M) = \displaystyle\int r^{n+1} dr = \frac{r^{n+2}}{n+2} + C$ $\boxed{\text{3 points}}$
6. $\vec{W} = A \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = A \dfrac{\vec{r}}{r^5} = A\overrightarrow{H_{-5}}$ $\boxed{\text{3 points}}$
   Alors $\varphi(M) = A\, f(M)|_{n=-5} = A \left.\dfrac{r^{n+2}}{n+2}\right|_{n=-5} + K = -\dfrac{A}{3r^3} + K$ $\boxed{\text{3 points}}$

Exercice 2 (30 points) On considère la forme différentielle :

$$\omega = \left(2x^3 + xy^2 + xz^2 + x\right) dx + x^2 y dy + x^2 z dz$$

1. Montrer que ω est une différentielle totale.
2. Déterminer la fonction $f = f(x, y, z)$ telle que $df = \omega$.
3. Calculer la dérivée de f suivant la direction du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$ où $M(1,1,2)$ et $N(3,2,0)$

Solution 2 :

1. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2xy = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $\dfrac{\partial P}{\partial z} = 2xz = \dfrac{\partial R}{\partial x}$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = 0 = \dfrac{\partial R}{\partial y}$ $\boxed{\text{2 points}}$
   Alors ω est une différentielle totale. $\boxed{\text{1 point}}$

2. $\omega\varphi$ est une différentielle totale alors il existe une fonction $f = f(x,y,z)$ telle que $df = \omega\varphi$ $\boxed{\text{1 point}}$

c'est-à-dire $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x^3 + xy^2 + xz^2 + x$ $\boxed{\text{2 point}}$

$\Longrightarrow f(M) = \displaystyle\int \left(2x^3 + xy^2 + xz^2 + x\right) dx$

$f(M) = \dfrac{1}{2}x^2\left(x^2 + y^2 + z^2 + 1\right) + g(y,z)$ $\boxed{\text{3 points}}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 y + \dfrac{\partial g}{\partial y} = x^2 y \Longrightarrow \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \Longrightarrow g = h(z)$ $\boxed{\text{2 points}}$

$f(M) = \dfrac{1}{2}x^2\left(x^2 + y^2 + z^2 + 1\right) + h(z)$ $\boxed{\text{2 points}}$

$\dfrac{\partial f}{\partial z} = x^2 z + h' = x^2 z \Longrightarrow h' = 0 \Longrightarrow h = Cte = C$ $\boxed{\text{1 point}}$

Finalement :

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2\left(x^2 + y^2 + z^2 + 1\right) + C \ \boxed{\text{2 points}}$$

3. $\overrightarrow{\nabla} f = \left(2x^3 + xy^2 + xz^2 + x\right)\overrightarrow{i} + x^2 y \overrightarrow{j} + x^2 z \overrightarrow{k}$ $\boxed{\text{3 points}}$

Soit $\overrightarrow{e} = \dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|} = \dfrac{\overrightarrow{MN}}{\|\overrightarrow{u}\|} = \dfrac{2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}}{3}$ $\boxed{\text{2 points}}$

$\dfrac{\partial f}{\partial u} = \overrightarrow{\nabla} f \cdot \overrightarrow{e} = \dfrac{1}{3}\left(\left(2x^3 + xy^2 + xz^2 + x\right)\overrightarrow{i} + x^2 y \overrightarrow{j} + x^2 z \overrightarrow{k}\right) \cdot 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ $\boxed{\text{2 points}}$

$= \dfrac{1}{3}\left(2\left(2x^3 + xy^2 + xz^2 + x\right) + x^2 y - 2x^2 z\right)$

$= \dfrac{1}{3}x\left(4x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2 + xy - 2xz\right)$ $\boxed{\text{3 points}}$

Exercice 3 (30 points) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2, A^3 et déduire $A^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
2. A est-elle inversible ? Justifier votre réponse, déterminer A^{-1}si elle existe.
3. Calculer $P(\lambda)$ le polynôme caractéristique de A.
4. Vérifier que $P(A) = O$.
5. Déduire la matrice inverse A^{-1}.
6. Déduire la solution du système linéaire.

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 3 \\ -x - y + z = 2 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \qquad (S)$$

Solution 3 :

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ $\boxed{\text{3 points}}$

$A^3 = A^2 A = IA = A$ $\boxed{\text{2 point}}$

On déduite, par reccurence que : $A^n = \begin{cases} I & si \quad n = 2k \\ A & si \quad n = 2k+1 \end{cases}$ $\boxed{\text{3 points}}$

2. $\det A = -1 \neq 0$ donc A est inversible. $\boxed{\text{2 points}}$

   On a $A^2 = I \Longrightarrow A^{-1} = A$ $\boxed{\text{2 points}}$

3. L'équation caractéristique est

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$$

   $P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}$ $\boxed{\text{3 point}}$

   $= -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1$ $\boxed{\text{2 points}}$

4. $P(A) = -A^3 + A^2 + A - I$

   $= -A + I + A - I = O$ $\boxed{\text{3 point}}$

5. $P \times A^{-1} = -A^2 + A + I - A^{-1} = O$

   $A^{-1} = -A^2 + A + I = -I + A + I = A$ $\boxed{\text{3 point}}$

6. Le système s'écrit :

   $(S) : AX = B$ $\boxed{\text{2 points}}$

   avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{2 points}}$

   Donc $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$

   $x = 10, y = -5$, et $z = 7$. $\boxed{\text{3 point}}$