Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban
le cnam

Mathématiques pour les Électriciens (LB203)

Examen de ***Rattrapage*** *2013-2014 -Semestre I* **Durée : 2h : 00**

Documents, téléphones, ordinateurs : strictement interdits

Exercice 1 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2. En déduire $A^n, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Soit B la matrice définie par : $B = A - 2I$, .où I est la matrice unité. Calculer B.
3. Calculer en fonction de A et I les matrices B^2 et B^3.
4. Montrer que $B^3 + 4B^2 + 5B + 2I = 0$ et déduire B^{-1}.
5. Déduire la solution du système linéaire

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 4x - 3y + 2z = -2 \\ -2x + y - 2z = -2 \end{cases}$$

Solution 1

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$

   Par reccurence on démontre que $A^n = A$
2. $B = A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
3. $B^2 = (A - 2I)^2 = A^2 - 4AI + 4I^2 = A^2 - 4A + 4I = -3A + 4I$ car $A^2 = A$

   $B^3 = B^2B = (-3A + 4I)(A - 2I) = -3A^2 + 10AI - 8I^2$
   $= -3A + 10A - 8I = 7A - 8I$
4. $B^3 + 4B^2 + 5B + 2I = -(7A - 8I) - 4(-3A + 4I) - 5(A - 2I) - 2I = 0$

   $$B^{-1} = -\frac{1}{2}\left(B^2 + 4B + 5I\right)$$
   $$= -\frac{1}{2}\left(-3A + 4I + 4(A - 2I) + 5I\right)$$
   $$= -\frac{1}{2}(A + I) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

5. Sous forme matricielle : $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

La Solution du système : $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 4x - 3y + 2z = -2 \\ -2x + y - 2z = -2 \end{cases}$, est : $x = -6$, $y = -4$ et $z = 5$

Exercice 2 Résoudre l'équation différentielle

$$x'' + 2x' + x = e^{-2t}$$

Solution 2

a solution générale est : $x = x_g + x_p$ où x_g est la solution générale de l'ESSM et x_p est une solution particulière de l'EASM

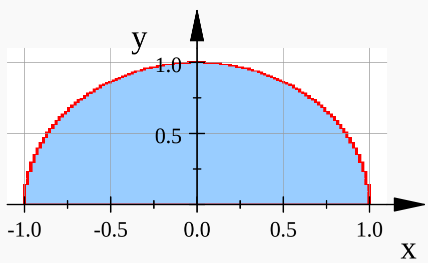
– ESSM :
  $x'' + 2x' + x = 0 \rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Longleftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0$
  $\lambda = -1$ est une racine double donc $x_g = (\alpha t + \beta)\, e^{-t}$
– EASM :
  La solution est de la forme $x_p = ce^{-2t}$ comme $\lambda \neq -2$
  $x'_p = -2ce^{-2t}$ et $x''_p = 4ce^{-2t}$
  $x'' + 2x' + x = e^{-2t} \Longrightarrow (4c - 4c + c)\, e^{-2t} = e^{-2t} \Longrightarrow c = 1$ et donc $x_p = e^{-2t}$.

Soit finalement :

$$x(t) = (\alpha t + \beta)\, e^{-t} + e^{-2t}$$

Exercice 3 Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{1 + x^2 + y^2}$ où D est le demi-disque $x^2 + y^2 \leq 1$ et $y \geq 0$.

Solution 3



En coordonnées polaires : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ avec $\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$ et $dxdy = rdrd\theta$

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{1+x^2+y^2} = \iint_\Delta \frac{rdrd\theta}{1+r^2} = \int_0^1 \left(\int_0^\pi \frac{rd\theta}{1+r^2} \right) dr$$
$$= \int_0^1 \frac{r}{1+r^2} (\theta)_0^\pi \, dr = \pi \int_0^1 \frac{r}{1+r^2} dr = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{d\left(1+r^2\right)}{1+r^2}$$
$$= \frac{\pi}{2} \ln\left(1+r^2\right)_0^1 = \frac{\pi}{2} \ln 2$$

Exercice 4 Soit le champ vectoriel

$$\overrightarrow{H} = (y+2xz-1)\overrightarrow{i} + \left(x-3zy^2-1\right)\overrightarrow{j} + \left(x^2-y^3\right)\overrightarrow{k}$$

1. Calculer $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{H}$ est un champ conservatif.
3. Déterminer le potentiel scalaire $\varphi(x,y,z)$ associé à $\overrightarrow{H}$.

Solution 4

oit $\overrightarrow{H} = (y+2xz-1)\overrightarrow{i} + \left(x-3zy^2-1\right)\overrightarrow{j} + \left(x^2-y^3\right)\overrightarrow{k} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} + R\overrightarrow{k}$

1. $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 2z - 6yz$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}$$
$$= \left(-3y^2+3y^2\right)\overrightarrow{i} + (2x-2x)\overrightarrow{j} + (1-1)\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$$

2. Puisque $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{0}$,alors $\overrightarrow{H}$ est un champ conservatif $\Longleftrightarrow \exists \varphi = \varphi(x,y,z)$ tel que $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla}\varphi$
3. $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla}\varphi \Longleftrightarrow (y+2xz-1)\overrightarrow{i} + \left(x-3zy^2-1\right)\overrightarrow{j} + \left(x^2-y^3\right)\overrightarrow{k} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\overrightarrow{i} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\overrightarrow{j} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\overrightarrow{k}$

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = y+2xz-1 \Longrightarrow \varphi = \displaystyle\int (y+2xz-1)\,dx = xy + x^2z - x + f(y,z)$

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = x-3zy^2-1 \Longleftrightarrow x + \dfrac{\partial f}{\partial y} = x-3zy^2-1 \Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y} = -3zy^2-1$

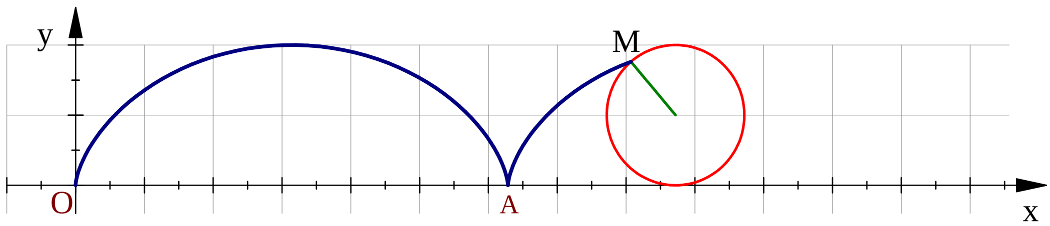
$f(y,z) = \displaystyle\int \left(-3zy^2-1\right)dy = -zy^3 - y + g(z)$

$\varphi = xy + x^2z - x - zy^3 - y + g(z)$

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = x^2-y^3 \Longleftrightarrow x^2-y^3+g'(z) = x^2-y^3 \Longrightarrow g' = 0$ donc $g = ct^e = C$

$$\varphi(x,y,z) = xy + x^2z - x - zy^3 - y + C$$

Exercice 5 On appelle cycloïde la trajectoire d'un point $M(x,y)$, lié à un cercle de rayon R qui roule sans glisser sur une droite



La courbe est définie alors par : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ avec

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

La première branche $(C) = \widetilde{OA}$ est obtenue par un tour complet du cercle sur lui même $(t \in [0, 2\pi])$.

1. Calculer la longueur de (C). $(8pts)$
2. On suppose que (C) est homogène, avec une densité linéique de masse σ, déterminer le centre de gravité de (C) $(15pts)$
3. Calculer le travail effectué par une particule qui se déplace sur (C) sous l'action du champ de force $\overrightarrow{F} = xy\overrightarrow{i} + y^2\overrightarrow{j}$. $(12pts)$

on donne : $\int x(1-\cos x)^2 dx = \frac{1}{8}\left(6x^2 + 2x\sin 2x - 16x\sin x + \cos 2x - 16\cos x\right)$

Solution 5

1. $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

   $x = R(t - \sin t) \Longrightarrow dx = R(1 - \cos t)\, dt$

   $y = R(1 - \cos t) \Longrightarrow dy = R\sin t dt$

   $d\ell = R\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}dt = R\sqrt{2(1-\cos t)}dt$

   on a $1 - \cos t = 2\sin^2\frac{t}{2} \Longrightarrow d\ell = 2R\sin\frac{t}{2}dt$ $\boxed{\text{5 points}}$

   donc $\ell = \int_C d\ell = 2R\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = 8R$ $\boxed{\text{3points}}$

2. Soit $G(X,Y)$ le centre de gravité, alors $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\int_C \overrightarrow{r}\sigma d\ell$

   m est la masse totale de (C) : $dm = \sigma d\ell \Longrightarrow m = \int_C \sigma d\ell = 8\sigma R$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $$X = \frac{1}{m}\int_C x\sigma d\ell = \frac{1}{8R}\int_0^{2\pi} R(t - \sin t)\left(2R\sin\frac{t}{2}\right)dt$$

   $$= \frac{R}{4}\int_0^{2\pi}(t - \sin t)\sin\frac{t}{2}dt = \frac{R}{4}\left(\int_0^{2\pi} t\sin\frac{t}{2}dt - \int_0^{2\pi}\sin t\sin\frac{t}{2}dt\right)$$ $\boxed{\text{2 points}}$

– Pour la première intégrale, on fait l'intégration par parties :

$$\begin{cases} u = t & \Longrightarrow \quad du = dt \\ dv = \sin\frac{t}{2}dt & \Longrightarrow \quad v = -2\cos\frac{t}{2} \end{cases}$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} t\sin\frac{t}{2}dt = -2t\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi}\cos\frac{t}{2}dt = 4\pi \boxed{\text{2 points}}$$

– dans la deuxième intégrale : $\sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$

$$I_2 = \int_0^{2\pi}\sin t\sin\frac{t}{2}dt = 2\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}dt = \frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 0 \boxed{\text{2 points}}$$

Alors $X = \frac{R}{4}(4\pi - 0) = \pi R \boxed{\text{1 point}}$

$$Y = \frac{1}{m}\int_C y\sigma d\ell = \frac{1}{8R}\int_0^{2\pi} R(1-\cos t)\left(2R\sin\frac{t}{2}\right)dt$$

$$= \frac{R}{4}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}dt = \frac{R}{4}\int_0^{2\pi}2\sin^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt =$$

$$\frac{R}{2}\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}dt \boxed{\text{2 points}}$$

– $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = -2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 4 \boxed{\text{1 point}}$

– $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt = -\frac{4}{3}\cos^3\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\boxed{\text{2 points}}$

$$Y = \frac{R}{2}\left(4-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}R \boxed{\text{1point}}$$

3. $W = \displaystyle\int_C \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr} = \int_C xydx + y^2dy \boxed{\text{2 points}}$

$xydx + y^2dy = R(t-\sin t)R(1-\cos t)R(1-\cos t)dt + R^2(1-\cos t)^2 R\sin tdt$
$= R^3 t(1-\cos t)^2 dt \boxed{\text{5 points}}$

$$W = R^3\int_0^{2\pi} t(\cos t - 1)^2 dt = R^3\,\frac{\cos 2t - 16\cos t + 2t\sin 2t - 16t\sin x + 6t^2}{8}\Bigg|_0^{2\pi}$$

$= 3\pi^2 R^3 \boxed{\text{5 points}}$