Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Mathématiques pour les Électriciens (LB203)

Examen de ***rattrapage*** *2014-2015-Semestre I* **Durée : 2h :00**

Solutions

Exercice 1 (30 points) On considère les matrices :

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\4&-1&2\\-2&1&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&-1&-j\\1&-1&-j\\j&-j&1\end{pmatrix}\text{ et }C=\begin{pmatrix}3&-2&0\\4&-3&0\\4&-2&-1\end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2, A^3 et en déduire A^n.
2. Calculer B^2, B^3 et en déduire B^n
3. Calculer C^2 et en déduire C^n
4. Calculer AB et exprimer $(AB)^2$ en fonction de AB.
5. La matrice C est-elle inversible. Si oui calculer C^{-1}
6. Résoudre le système

$$\begin{cases}3x-2y=2\\4x-3y=2\\4x-2y-z=2\end{cases}$$

Solution 1

1. $A^2=\begin{pmatrix}3&-1&1\\4&-1&2\\-2&1&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}3&-1&1\\4&-1&2\\-2&1&0\end{pmatrix}=A$

   $A^3=A^2A=AA=A^2=A\Longrightarrow A^n=A$

   Supposant que $A^n=A\Longrightarrow A^{n+1}=A^n\times A=A\times A=A^2=A$

   Donc $A^n=A\ \forall n\in\mathbb{N}$
2. $B^2=\begin{pmatrix}1&-1&-j\\1&-1&-j\\j&-j&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&-1&-j\\1&-1&-j\\j&-j&1\end{pmatrix}=B\Longrightarrow B^n=B$
3. $C^2=\begin{pmatrix}3&-2&0\\4&-3&0\\4&-2&-1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$
4. $AB=\begin{pmatrix}3&-1&1\\4&-1&2\\-2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-j\\1&-1&-j\\j&-j&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+j&-2-j&1-2j\\3+2j&-3-2j&2-3j\\-1&1&j\end{pmatrix}$

   $(AB)^2=\begin{pmatrix}2+j&-2-j&1-2j\\3+2j&-3-2j&2-3j\\-1&1&j\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}-2-j&2+j&-1+2j\\-3-2j&3+2j&-2+3j\\1&-1&-j\end{pmatrix}=-AB$
5. $\det(C)=\begin{vmatrix}3&-2&0\\4&-3&0\\4&-2&-1\end{vmatrix}=1\neq0$ donc C est inversible

   On a $C^2=I$ donc $C^{-1}=C$

6. Le système est de la forme

$$C\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

alors $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

soit donc $x = x = y = z = 2$

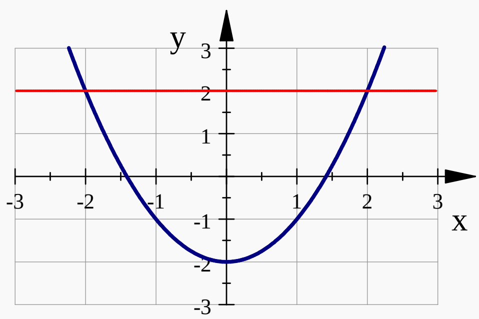
Exercice 2 Soit le champ vectoriel

$$\overrightarrow{H} = (2x+z)\,\overrightarrow{i} + \left(x^2 - y + xz - 1\right)\overrightarrow{j} + x\,\overrightarrow{k}$$

1. Calculer $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}$, $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}\right)$
2. Calculer $\int_{C+} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr}$ où C est la portion de la parabole $y = x^2 - 2$ joignant les points $A\,(0,-2,0)$ et $B\,(2,2,0)$
3. $\overrightarrow{H}$ est il un champ de gradient ? Justifier votre réponse
4. Trouver une fonction $\mu\,(y)$ telle que $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{dr}$ soit une différentielle totale où $\overrightarrow{w} = \mu\overrightarrow{H}$.
5. Trouver la fonction $\varphi\,(x,y,z)$ telle que $d\varphi = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{dr}$
6. Déduire la valeur de l'intégrale $\int_L \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{dr}$ où (L) est une courbe joignant les points $A\,(1,a,a)$ et $B\,(a,a,1)$, et a est une constante donnée.

Solution 2

1. $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = -x\,\overrightarrow{i} + (2x+z)\,\overrightarrow{k} \qquad \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} = 1 \qquad \overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}\right) = 0$
2. Graphe :



$$\int_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_C (2x+z)\,dx + \left(x^2 - y + xz - 1\right)dy + xdz$$

Sur (C) $y = x^2 - 2 \Longrightarrow dy = 2xdx$ et $0 \le x \le 2$, $z = dz = 0$

$$\Longrightarrow \int_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_C 2xdx + \left(x^2 - y - 1\right)dy = \int_0^2 \left(2x + \left(x^2 - x^2 + 2 - 1\right)2x\right)dx = 4\int_0^2 xdx = 8$$

3. on a trouvé que $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = -x\,\overrightarrow{i} + (2x+z)\,\overrightarrow{k} \neq \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{H}$ n'est pas une différentielle totale
4. soit $\mu = \mu\,(y) \Longrightarrow \overrightarrow{w} = \mu\left((2x+z)\,\overrightarrow{i} + \left(x^2 - y + xz - 1\right)\overrightarrow{j} + x\,\overrightarrow{k}\right)$

   $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{dr}$ est une différentielle totale si :

$$\frac{\partial\left(\mu\left(2x+z\right)\right)}{\partial y}=\mu'\left(2x+z\right)=\frac{\partial\left(\mu Q\right)}{\partial x}=\mu\left(2x+z\right)$$
$$\frac{\partial \mu x}{\partial x}=\mu=\frac{\partial\left(2\mu x+\mu z\right)}{\partial z}=\mu$$
$$\frac{\partial \mu x}{\partial y}=\mu' x=\frac{\partial \mu\left(x^2-y+xz-1\right)}{\partial z}=x\mu$$
donc, il faut que : $\mu'=\mu$
$$\Longleftrightarrow \frac{d\mu}{dy}=\mu \Longrightarrow \frac{d\mu}{\mu}=dy\Longrightarrow \mu=e^y$$
$\overrightarrow{w}=\left(2x+z\right)e^y\overrightarrow{i}+\left(x^2-y+xz-1\right)e^y\overrightarrow{j}+xe^y\overrightarrow{k}$ est un champ de gradient

5. $d\varphi=\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{dr}\Longleftrightarrow\overrightarrow{\nabla\varphi}=\overrightarrow{w}$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\left(2x+z\right)e^y\Longrightarrow\varphi\left(x,y,z\right)=\int\left(2x+z\right)e^y dx=\left(x^2+zx\right)e^y+f\left(y,z\right)$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\left(x^2+zx\right)e^y+\frac{\partial f}{\partial y}=\left(x^2-y+xz-1\right)e^y\Longrightarrow\frac{\partial f}{\partial y}=\left(-y-1\right)e^y$$
$$f\left(y,z\right)=\int\left(-y-1\right)e^y dy=-ye^y+g\left(z\right)$$
$$\varphi\left(x,y,z\right)=\left(x^2+zx\right)e^y+f\left(y,z\right)=\left(x^2+zx\right)e^y-ye^y+g\left(z\right)$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=xe^y+\frac{dg}{dz}=xe^y\Longrightarrow\frac{dg}{dz}=0\Longrightarrow g=cte=k$$
$$\varphi\left(x,y,z\right)=\left(x^2+zx-y\right)e^y+k$$

6. $\displaystyle\int_L\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{dr}=\int_{AB}d\varphi=\varphi\left(B\right)-\varphi\left(A\right)=\left(a^2+a-a\right)e^a-\left(1+a-a\right)e^a=\left(a^2-1\right)e^a$

Exercice 3 (25 points) Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'-\dfrac{2y}{x-1}=2\left(x-1\right)$
2. $y''-5y'+4y=x+2e^x$.
   Donner une solution particulière vérifiant les conditions $y\left(0\right)=1$ et $y'\left(0\right)=0$

Solution 3

1. $y'-\dfrac{2y}{x-1}=2\left(x-1\right)$
   - ESSM : $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2y}{x-1}=0\Longleftrightarrow\dfrac{dy}{y}=\dfrac{2dx}{x-1}\Longrightarrow\ln|y|=2\ln|x-1|+C$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $$y_g=K\left(x-1\right)^2\quad\boxed{\text{2 points}}$$
   - EASM : $K=K\left(x\right):y'=K'\left(x-1\right)^2+2K\left(x-1\right)$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $$y'-\frac{2y}{x-1}=2\left(x-1\right)$$
   $$\Longrightarrow K'\left(x-1\right)^2+2K\left(x-1\right)-\frac{2K\left(x-1\right)^2}{x-1}=2\left(x-1\right)$$
   $$\Longrightarrow K'=\frac{2}{x-1}\Longrightarrow K=2\ln|x-1|\quad\boxed{\text{2 points}}$$
   $$y_p=\left(x-1\right)^2\ln\left(x-1\right)^2$$
   $y\left(x\right)=y_g+y_p$:
   $$y\left(x\right)=\left(x-1\right)^2\left(K+\ln\left(x-1\right)^2\right)\quad\boxed{\text{2 points}}$$

2. $y'' - 5y' + 4y = x + 2e^x$
   - ESSM : $y'' - 5y' + 4y = 0$
     Equation caratéristique : $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$, les racines sont : $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1$ $\boxed{\text{2 points}}$
     $$y_g = C_1 e^{4x} + C_2 e^x \qquad \boxed{\text{3 points}}$$
   - EASM :
     $\lambda = 1$ est une racine simple, le second membre est $x + 2e^x$ on cherchera une solution particulière sous la forme : $y_p = ax + b + cxe^x$
     $$\begin{cases} y_p' = a + ce^x + cxe^x = a + (cx + c)\, e^x \\ y_p'' = (cx + c)\, e^x + ce^x = (cx + 2c)\, e^x \end{cases}$$
     $y'' - 5y' + 4y = x + 2e^x$
     $\Longrightarrow (cx + 2c)\, e^x - 5a - 5\,(cx + c)\, e^x + 4\,(ax + b) + 4cxe^x = x + 2e^x$ $\boxed{\text{2 points}}$
     $\Longrightarrow 4b - 5a + 4ax - 3ce^x = x + 2e^x$
     $$\begin{cases} -3c = 2 \\ 4a = 1 \\ 4b - 5a = 0 \end{cases} \Longrightarrow c = -\frac{2}{3} \qquad a = \frac{1}{4} \qquad b = \frac{5}{16} \quad \boxed{\text{3 points}}$$
     $$y_p = \frac{x}{4} + \frac{5}{16} - \frac{2x}{3} e^x$$
     $y\,(x) = y_g + y_p$
     $$y\,(x) = C_1 e^{4x} + \left(C_2 - \frac{2x}{3}\right) e^x + \frac{x}{4} + \frac{5}{16} \quad \boxed{\text{2 points}}$$
     $$y\,(0) = C_1 + C_2 + \frac{5}{16} = 1 \Longrightarrow C_1 + C_2 = \frac{11}{16}$$
     $$y'\,(0) = \left(4C_1 e^{4x} + \left(-\frac{2}{3} + C_2 - \frac{2x}{3}\right) e^x + \frac{1}{4}\right)_{x=0} = 4C_1 - \frac{2}{3} + C_2 + \frac{1}{4} = 4C_1 + C_2 - \frac{5}{12} = 0$$
     $$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{11}{16} \\ 4C_1 + C_2 = \frac{5}{12} \end{cases} \Longrightarrow \left[C_1 = -\frac{13}{144}, C_2 = \frac{7}{9}\right] \quad \boxed{\text{2 points}}$$
     $$y_P\,(x) = -\frac{13}{144} e^{4x} + \left(\frac{7}{9} - \frac{2x}{3}\right) e^x + \frac{x}{4} + \frac{5}{16} \quad \boxed{\text{1 points}}$$