Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Mathématiques pour les Electriciens (LB203)
Deuxième session 2012
Documents, et téléphones : strictement interdits

Exercice 1 *On considère les matrices A, B et C telles que:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = A - I \quad et \quad C = A + B$$

où I est la matrice unitaire.

1. Calculer A^2 et A^3. En déduire A^n $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer B^2, B^3, en déduire B^n $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $AB = BA = O$, où O est la matrice nulle.
4. Calculer C^2, C^3, en déduire C^n $\forall n \in \mathbb{N}$.
5. C est-il inversible? Justifier votre réponse.
6. Déterminer $P(x)$: le Polynôme caractéristique de A
7. Déduire $Q(\lambda)$: le Polynôme caractéristique de B.Vérifier que $Q(B) = O$.
8. Déterminer sans faire de calcul matriciel C^{-1}
9. Déduire la solution du système linéaire:

$$\begin{cases} 5x - 2y + 2z = 1 \\ 8x - 3y + 4z = 2 \\ -4x + 2y - z = -1 \end{cases}$$

Solution 1 *:*

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$

   A est une matrice idempotente donc $A^n = A$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. $B = A - I \Longrightarrow B^2 = (A - I)^2 = A^2 - 2AI + I^2 = A - 2A + I = -A + I = -B$

   $B^3 = B^2 B = -BB = -B^2 = -(-B) = B$

   $B^4 = B^2 B^2 = (-B)(-B) = B^2 = -B$

   d'où: $B^n = -(-1)^n B = \begin{cases} -B & si \quad n = 2k \\ B & si \quad n = 2k+1 \end{cases}$

3. $AB = A\,(A - I) = A^2 - AI = A - A = O$
   $BA = (A - I)\,A = A^2 - IA = A - A = O$

4. $C = A + B = 2A - I \Longrightarrow C^2 = (2A - I)^2 = 4A^2 - 4AI + I^2 = 4A - 4A + I = I$
   $C^3 = C^2 C = IC = C$
   $C^n = \begin{cases} I & si \quad n = 2k \\ C & si \quad n = 2k+1 \end{cases}$

5. $C = 2A - I = 2\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 8 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
   $\det C = -1 \neq 0$
   Ou : $C^2 = I \Longrightarrow |C|^2 = |I| = 1 \Longrightarrow |C| = \pm 1 \neq 0$
   Donc C est inversible.

6. $P\,(x) = |A - xI| = \begin{vmatrix} 3-x & -1 & 1 \\ 4 & -1-x & 2 \\ -2 & 1 & -x \end{vmatrix}$
   $= -x^3 + 2x^2 - x = -x\,(x^2 - 2x + 1) = -x\,(x-1)^2$

7. $Q\,(\lambda) = \det\,(B - \lambda I) = \det\,(A - I - \lambda I)$
   $= \det\,(A - (\lambda+1)\,I) = P\,(\lambda + 1)$
   $= -\,(\lambda+1)\,(\lambda+1-1)^2 = -\,(\lambda+1)\,\lambda^2 = -\left(\lambda^3 + \lambda^2\right)$
   $Q\,(B) = -\,(B^3 + B^2) = -\,(B - B) = O$

8. On a $C^2 = I \Longrightarrow C^2 C^{-1} = C^{-1} \Longrightarrow C = C^{-1}$

9. La forme matricielle du système est : $CX = V$ avec $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
   $X = C^{-1}V = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 8 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow [x = -1, y = -2, z = 1]$

Exercice 2 *Montrer que :*

$$\omega = \left(y^2 + ze^y + yz^2\right)dx + \left(2xy + xze^y + xz^2\right)dy + \left(xe^y + 2xyz\right)dz$$

est une différentielle totale et intégrer ω.

Solution 2 *:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y + ze^y + z^2 = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z} = xe^y + 2xz = \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{\partial R}{\partial x} = e^y + 2yz = \dfrac{\partial P}{\partial z} \end{cases} \Longrightarrow \omega \text{ est une différentielle totale par suite il existe}$$

$\varphi = \varphi\,(x, y, z)$ telle que $\omega = d\varphi$

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = y^2 + ze^y + yz^2 \Longrightarrow \varphi = \int (y^2 + ze^y + yz^2)\, dx = xy^2 + xyz^2 + xze^y + f(y,z)$
$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 2xy + xz^2 + xze^y + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy + xze^y + xz^2 \Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \Longrightarrow f = g(z)$
$\varphi = xy^2 + xyz^2 + xze^y + g(z)$
$\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = 2xyz + xe^y + g' = xe^y + 2xyz \Longrightarrow g' = 0 \Longrightarrow g = C$

$$\varphi = xy^2 + xyz^2 + xze^y + C$$

Exercice 3 *Soit le champ vectoriel* $\overrightarrow{H} = (y + 2xz - 1)\,\overrightarrow{i} + (x - 3zy^2 - 1)\,\overrightarrow{j} + (x^2 - y^3)\,\overrightarrow{k}$.

1. Calculer $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{H}$ est un champ conservatif.
3. Déterminer le potentiel scalaire $\varphi(x,y,z)$ associé à $\overrightarrow{H}$.
4. En déduire $\oint_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr}$ où (C) est le cercle : $x^2 + y^2 = R^2$ du plan $z = a > 0$.
5. Calculer $\iint_D \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H}\, dxdy$ où D est le disque limité par (C).

Solution 3 *Soit* $\overrightarrow{H} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} + R\overrightarrow{k}$

1. $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 2z - 6yz$

   $$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} + \left(\dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}\right)\overrightarrow{j} + \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}$$

   $= (-3y^2 + 3y^2)\,\overrightarrow{i} + (2x - 2x)\,\overrightarrow{j} + (1 - 1)\,\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$

2. Puisque $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{0}$,alors $\overrightarrow{H}$ est un champ conservatif $\Longleftrightarrow \exists\varphi = \varphi(x,y,z)$ tel que $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla}\varphi$

3. $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla}\varphi \Longleftrightarrow$

   $(y + 2xz - 1)\,\overrightarrow{i} + (x - 3zy^2 - 1)\,\overrightarrow{j} + (x^2 - y^3)\,\overrightarrow{k} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\overrightarrow{i} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\overrightarrow{j} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\overrightarrow{k}$

   $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = y + 2xz - 1 \Longrightarrow \varphi = \displaystyle\int (y + 2xz - 1)\, dx = xy + x^2z - x + f(y,z)$

   $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = x - 3zy^2 - 1 \Longleftrightarrow x + \dfrac{\partial f}{\partial y} = x - 3zy^2 - 1 \Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y} = -3zy^2 - 1$

   $f(y,z) = \displaystyle\int (-3zy^2 - 1)\, dy = -zy^3 - y + g(z)$

   $\varphi = xy + x^2z - x - zy^3 - y + g(z)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = x^2 - y^3 \Longleftrightarrow x^2 - y^3 + g'(z) = x^2 - y^3 \Longrightarrow g' = 0 \text{ donc } g = ct^e = C$$

$$\varphi(x, y, z) = xy + x^2 z - x - zy^3 - y + C$$

4. (C) est une courbe fermée et $\overrightarrow{H}$ est un champ conservatif donc $\oint\limits_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = 0$.

5. $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} = 2z - 6yz$ sur $D : z = a \Longrightarrow \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} = 2a - 6ya = 2a(1 - 3y)$

   $I = \iint\limits_D \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} dxdy = 2a \iint\limits_D (1 - 3y)\, dxdy$

   En coordonnées polaires: $\begin{cases} x = r\cos\theta & 0 \leq r \leq 2 \\ y = r\sin\theta & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ et $dxdy = rdrd\theta$

   $$I = 2a \iint\limits_{\Delta} (1 - 3r\sin\theta)\, rdrd\theta = 2a \int\limits_0^R \left(\int\limits_0^{2\pi} (r - 3r^2 \sin\theta)\, d\theta \right) dr = 2\pi a R^2$$

   $\int\limits_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 0$

Exercice 4 *Calculer l'intégrale :*

$$I = \int \frac{\cosh x + 1}{\cosh x - 1} e^x dx$$

Solution 4 *:* $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$\frac{\cosh x + 1}{\cosh x - 1} = \frac{\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + 1}{\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} - 1} = \frac{e^x + e^{-x} + 2}{e^x + e^{-x} - 2} = \frac{e^{2x} + 2e^x + 1}{e^{2x} - 2e^x + 1}$$

On pose $u = e^x$ *alors* $I = \int \dfrac{u^2 + 2u + 1}{u^2 - 2u + 1} du$

$$\frac{u^2 + 2u + 1}{u^2 - 2u + 1} = \frac{u^2 - 2u + 1 + 4u}{u^2 - 2u + 1} = 1 + \frac{4u}{(u-1)^2}$$

$$= 1 + 4\frac{u - 1 + 1}{(u-1)^2} = 1 + \frac{4}{u - 1} + \frac{4}{(u-1)^2}$$

$$I = \int du + \int \frac{4du}{u - 1} + \int \frac{4du}{(u-1)^2} = u + 4\ln(u - 1) - \frac{4}{u - 1} + C$$

$$I = e^x + 4\ln(e^x - 1) - \frac{4}{e^x - 1} + C \tag{1}$$

Exercice 5 *RRésoudre les équations différentielles :*

1. $y'' - 2y' + 5y = xe^{-x}$

2. $y' - \dfrac{y}{1-x} = 2$

Solution 5 :

1. $y'' - 2y' + 5y = 0$

   $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$

   $\Delta = 4 - 20 = -16 = 16j^2 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{2 \pm j4}{2} = 1 \pm 2j$

   $y_g(x) = e^x (A\cos 2x + B \sin 2x)$

   $y_p = (ax + b)\, e^{-x}$

   $y_p' = (a - ax - b)\, e^{-x}$

   $y_p'' = (-a - a + ax + b)\, e^{-x}$

   $y'' - 2y' + 5y = xe^{-x} \Longrightarrow (-a - a + ax + b)\, e^{-x} - 2(a - ax - b)\, e^{-x} + 5(ax + b)\, e^{-x} = xe^{-x}$

   $\Longrightarrow 8b - 4a + 8ax = x \Longrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{8} \\ b = \dfrac{a}{2} = \dfrac{1}{16} \end{cases} \Longrightarrow y_p = \dfrac{2x+1}{16} e^{-x}$

   $$y(x) = e^x (A\cos 2x + B\sin 2x) + \frac{2x+1}{16} e^{-x}$$

2. $y' - \dfrac{y}{1-x} = 0 \Longrightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{1-x} \Longrightarrow \ln y = -\ln|1-x| + C = -\ln|1-x| + \ln K$

   $y_g = \dfrac{K}{1-x}$

   $K = K(t) \Longrightarrow y_p' = \dfrac{K'}{1-x} + \dfrac{K}{(1-x)^2}$

   $y' - \dfrac{y}{1-x} = 2 \Longrightarrow \dfrac{K'}{1-x} + \dfrac{K}{(1-x)^2} - \dfrac{K}{(1-x)^2} = 2$

   $K' = 2(1-x) \Longrightarrow K = \int 2(1-x)\, dx = 2x - x^2$

   $y_p = \dfrac{2x - x^2}{1-x}$

   $$y(x) = \frac{K + 2x - x^2}{1-x}$$