SIGNAL DETERMINISTE (MAA 107)

Examen Final Semestre I : 2008-2009 **Durée : 3:00h .**

Solutions

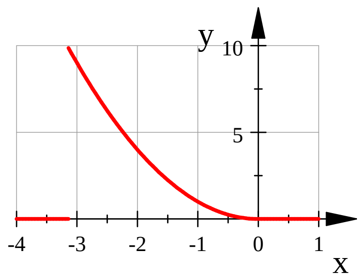
Exercice 1 (7 points) ***On considère la fonction***

$$f_0(x) = \begin{cases} x^2 & si \ -\pi < x < 0 \\ 0 & Ailleurs \end{cases}$$

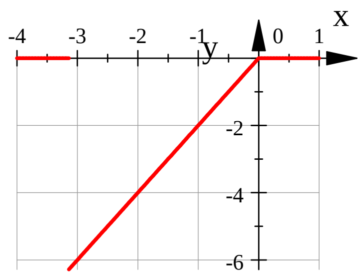
1. **Calculer les dérivées au sens des fonctions :** $f_0'(x), f_0''(x)$ **et** $f_0'''(x)$. **Tracer les courbes de** f_0, f_0', f_0''.

Réponse. $f_0(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ 0 & Ailleurs \end{cases}$ $\qquad f_0'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } -\pi < x < 0 \\ 0 & Ailleurs \end{cases}$

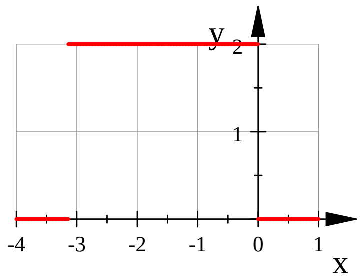
$f_0''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ 0 & Ailleurs \end{cases}$ $\qquad f_0''' = 0$



$f_0(x)$



$f_0'(x)$



$f_0''(x)$

2. **Calculer l'intégrale** $\int x^2 e^{\alpha x} dx$

Réponse. En intégrant deux fois par parties on trouve:

$$\int x^2 e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha^3}\left(\alpha^2 x^2 - 2\alpha x + 2\right) e^{\alpha x}$$

3. **Calculer au sens des fonctions la transformée de Fourier de** $f_0(x)$.

Réponse. La fonction $f_0(x)$ est sommable sur $]-\pi, 0[$.

$$F_0(\nu) = \int_{-\pi}^{0} x^2 \exp(-2j\pi\nu x)\, dx$$

En utlisant la résultat $\int x^2 e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha^3}\left(\alpha^2 x^2 - 2\alpha x + 2\right) e^{\alpha x}$ avec $\alpha = -2j\pi\nu$ on déduit:

$$F_0(\nu) = \frac{1}{(-2j\pi\nu)^3}\left((-2j\pi\nu)^2 x^2 - 2(-2j\pi\nu)x + 2\right)e^{-2j\pi\nu x}\Big|_{-\pi}^{0}$$

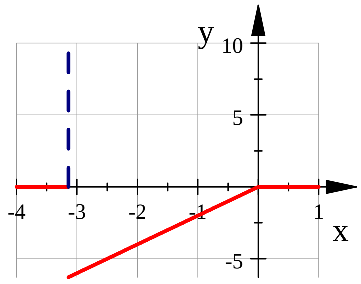
$$= \frac{(+2) - \left((-2j\pi\nu)^2\pi^2 + 2(-2j\pi\nu)\pi + 2\right)e^{-2j\pi^2\nu}}{(-2j\pi\nu)^3} = \frac{2 + (4\pi^4\nu^2 + 4j\pi^2\nu - 2)e^{-2j\pi^2\nu}}{8j\pi^3\nu^3}$$

4. **Calculer au sens des distributions les dérivées** $[f_0]', [f_0]''$ **et** $[f_0]'''$.**Tracer ses graphes.**

Réponse. La fonction $f_0(x)$ a un seul point de discontinuité: $x_0 = -\pi$

$\Delta f_0(-\pi) = \pi^2 - 0 = \pi^2$

$$[f_0]' = [f_0'] + \pi^2\delta(x+\pi)$$



$[f_0]'$

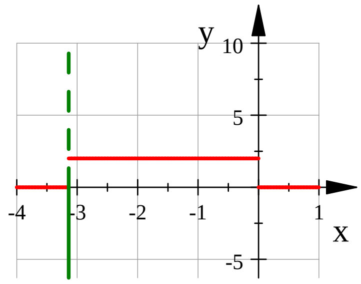
$[f_0]'' = [f_0']' + \pi^2\delta'(x+\pi)$

$f_0'(x)$ a un seul point de discontinuité $x_0 = -\pi$

$\Delta f_0'(-\pi) = -2\pi - 0 = -2\pi$

$[f_0']' = [f_0''] - 2\pi\delta(x+\pi)$

$$[f_0]'' = [f_0''] - 2\pi\delta(x+\pi) + \pi^2\delta'(x+\pi)$$



$[f_0]''$

$[f_0]''' = [f_0'']' - 2\pi\delta'(x+\pi) + \pi^2\delta''(x+\pi)$

$f_0''(x)$ a deux points de discontinuité:

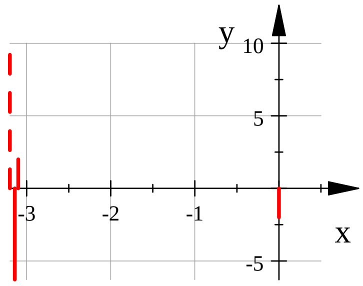
$x_0 = -\pi$: $\Delta f_0''(-\pi) = 2 - 0 = 2$

$x_1 = 0$: $\Delta f_0''(0) = 0 - 2 = -2$

$f_0'''(x) = 0$

$[f_0'']' = 2\delta(x+\pi) - 2\delta(x)$

$$[f_0]''' = 2\delta(x+\pi) - 2\delta(x) - 2\pi\delta'(x+\pi) + \pi^2\delta''(x+\pi)$$



$[f_0]'''$

5. **Calculer la transformée de Fourier de** $[f_0]'''$**et déduire celle de** $f_0(x)$

   Réponse. On utilise la propriété: $\mathcal{F}\left(T^{(n)}\right) = (2j\pi\nu)^n \mathcal{F}(T)$

   $\mathcal{F}(\delta(x-a)) = e^{-2j\pi\nu a}$ et $\mathcal{F}\left(\delta^{(n)}(x-a)\right) = (2j\pi\nu)^n e^{-2j\pi\nu a}$ par suite:

   $\mathcal{F}\left([f_0]'''\right) = 2e^{2j\pi^2\nu} - 2 - 2\pi(2j\pi\nu)e^{2j\pi^2\nu} + \pi^2(2j\pi\nu)^2 e^{2j\pi^2\nu} = (2j\pi\nu)^3 F_0(\nu)$

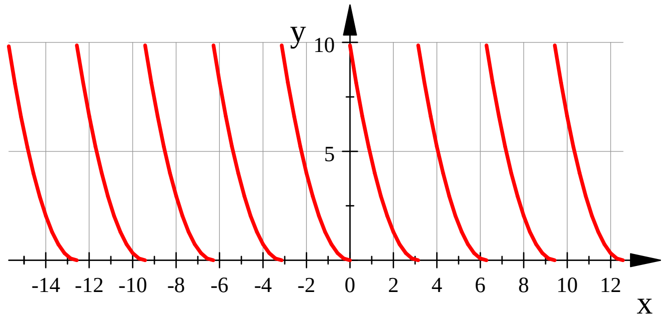
   $$F_0(\nu) = \frac{\left(2 - 2\pi(2j\pi\nu) + \pi^2(2j\pi\nu)^2\right)e^{-2j\pi^2\nu} - 2}{(2j\pi\nu)^3} = \frac{\left(2 - 4j\pi^2\nu - 4\pi^4\nu^2\right)e^{-2j\pi^2\nu} - 2}{-8j\pi^3\nu^3}$$

6. **Soit** $f(x)$ **la fonction** $\pi-$ **périodique qui coïncide avec** f_0 **sur** $]-\pi, 0[$.

   (a) **Exprimer** $f(x)$ **à l'aide du peigne de Dirac**

   Réponse. $f(x) = f_0 * \Delta_a = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_0 * \delta_{na} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_0(x-na) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_0(x+n\pi)$

   (b) **Tracer la courbe de** $f(x)$ **sur** $]-4\pi, 4\pi[$



(c) **Déduire la série réelle de Fourier associée à $f(x)$.**

Réponse. Les coefficients complexes de Fourier associés à $f(x)$ sont définis à partir de la tra,sformée de Fourier de $f_0(x)$ par :

$C_n = \frac{1}{T}F_0\left(\frac{n}{T}\right) = \frac{1}{\pi}F_0\left(\frac{n}{\pi}\right)$ d'où:

$$C_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(2-4j\pi^2\nu - 4\pi^4\nu^2)\,e^{-2j\pi^2\nu} - 2}{-8j\pi^3\nu^3}\right)_{\nu=\frac{n}{\pi}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\left(2-4j\pi^2\left(\frac{n}{\pi}\right) - 4\pi^4\left(\frac{n}{\pi}\right)^2\right)e^{-2j\pi^2 n/\pi} - 2}{-8j\pi^3\left(\frac{n}{\pi}\right)^3}\right)$$

$\exp(-2j\pi n) = 1$

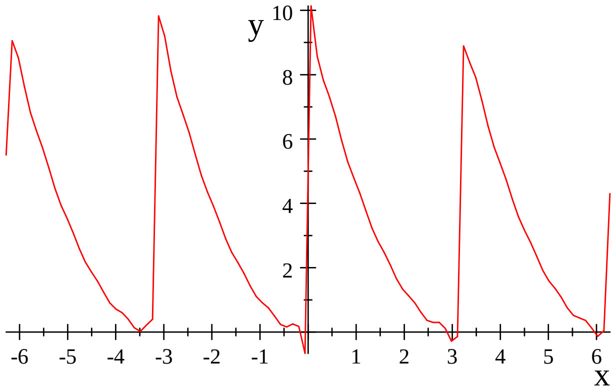
$$C_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2-4jn\pi - 4\pi^2n^2 - 2}{-8jn^3}\right) = \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{jn} = \frac{1}{2n^2} - j\frac{\pi}{2n}$$

$$a_n = 2\,\mathrm{Re}(C_n) = \frac{1}{n^2} \qquad b_n = -2\,\mathrm{Im}(C_n) = \frac{\pi}{n}$$

$$a_0 = C_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$$

$$S(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\cos 2nx}{n^2} + \frac{\pi \sin 2nx}{n}\right)$$

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{30}\left(\frac{\cos 2nx}{n^2} + \frac{\pi \sin 2nx}{n}\right)$$


y
10
8
6
4
2
-6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6
x