Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Signal déterministe (MAA107)

Examen Final *2012-2013* *Vendredi 22/2/2013* **Durée : 3: 00 h**

Documents autorisés : Notes de Cours de N.ASSAAD

Cahiers, exercices résolus, sessions, téléphones : strictement interdits

---

Exercice 1 (35 points) *On désigne par u_a la fonction échelon unité définie par:*

$$u_a(t) = u(t-a) = \begin{cases} 1 & si \quad t > a \\ 0 & si \quad t < a \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}^+$$

On définit la fonction causale $f(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} t & si \quad 0 < t < 1 \\ -t+2 & si \quad 1 < t < 2 \\ t-2 & si \quad 2 < t < 3 \\ 1 & si \quad t > 3 \end{cases}$$

1. Donner les transformées de Laplace des fonctions : $u_0(t), u_a(t), tu_a(t)$ et de $(t-a)u_a(t)$. $(3pts)$
2. Tracer la courbe représentative de $f(t)$. $(3pts)$
3. Exprimer $f(t)$ à l'aide de la fonction échelon unité. $(5pts)$
4. Calculer $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$, la transformée de Laplace de $f(t)$. $(5pts)$
5. On considère la fonction :
$$H(p) = \frac{36}{p^4 + 2p^3 - 3p^2}$$
Décomposer $H(p)$ en fractions simples et déduire la fonction temporelle $h(t)$ telle que $H(p) = \mathcal{L}(h(t))$ $(10pts)$
6. En utilisant la transformée de Laplace, déduire la solution de l'équation différentielle:
$$y'' + 2y' - 3y = f(t)$$
où $y(t)$ est une fonction causale vérifie les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. $(9pts)$

Solution 1 *:*

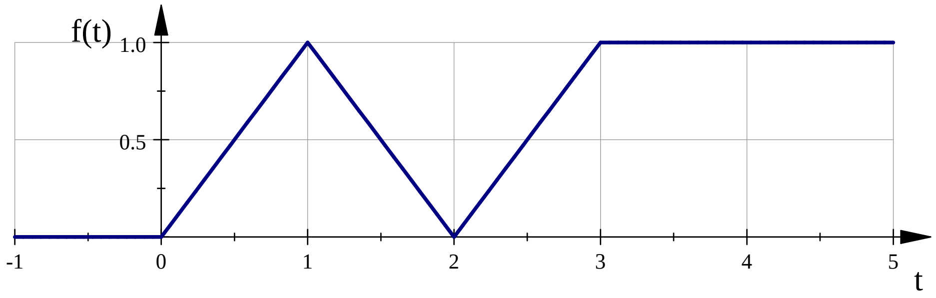
1. $\mathcal{L}(u_0) = \frac{1}{p}$ $\boxed{\frac{1}{2} \text{ point}}$

$\mathcal{L}(u_a) = \frac{e^{-ap}}{p}$ $\boxed{\frac{1}{2} \text{ point}}$

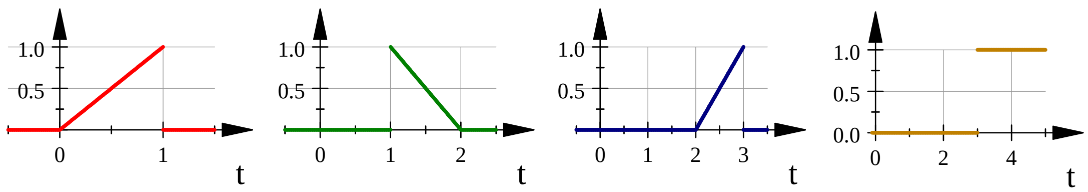
$\mathcal{L}(tu_a) = -\frac{d}{dp}(\mathcal{L}(u_a)) = -\frac{d}{dp}\left(\frac{e^{-ap}}{p}\right) = \frac{e^{-ap}}{p^2} + \frac{ae^{-ap}}{p}$ $\boxed{1 \text{ point}}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}((t-a)u_a) &= \mathcal{L}(tu_a) - \mathcal{L}(au_a) \\ &= \frac{e^{-ap}}{p^2} + \frac{ae^{-ap}}{p} - a\frac{e^{-ap}}{p} = \frac{e^{-ap}}{p^2} \quad \boxed{1 \text{ point}} \end{aligned}$$

2. Graphe : $\boxed{\text{3 points}}$

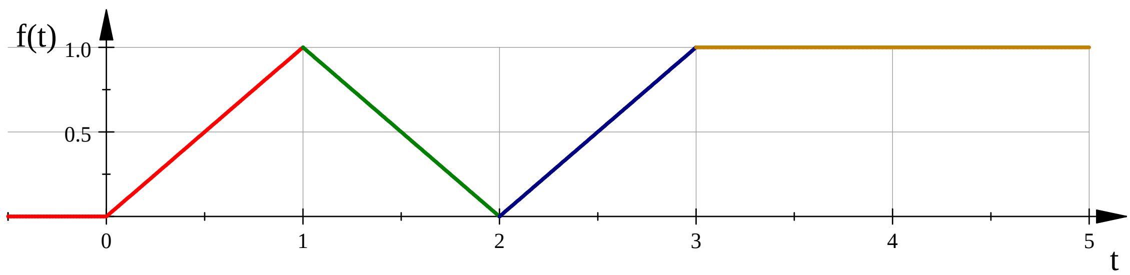


3. Pour déterminer une expression simple de $f(t)$ en fonction de $u_a(t)$ on peut utiliser la définition ou le graphe de $f(t)$.



$t(u_0 - u_1)$ $\quad (-t+2)(u_1-u_2)$ $\quad (t-2)(u_2-u_3)$ $\quad u_3$

$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$



4. **ou d'après la définition:**

$$f(t) = \begin{cases} t & si \quad 0 < t < 1 & \longrightarrow & t(u_0 - u_1) \\ -t+2 & si \quad 1 < t < 2 & \longrightarrow & (-t+2)(u_1-u_2) \\ t-2 & si \quad 2 < t < 3 & \longrightarrow & (t-2)(u_2-u_3) \\ 1 & si \quad t > 3 & \longrightarrow & u_3 \end{cases} \quad \boxed{1\times 4 = 4 \text{ points}}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= t(u_0-u_1) + (-t+2)(u_1-u_2) + (t-2)(u_2-u_3) + u_3 \\ &= tu_0 + (-t-t+2)u_1 + (t-2+t-2)u_2 + (-t+2+1)u_3 \\ &= tu_0 - 2(t-1)u_1 + 2(t-2)u_2 - (t-3)u_3 \end{aligned}$$

$$f(t) = tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + 2(t-2)u(t-2) - (t-3)u(t-3) \boxed{\text{1 point}}$$

5. On remarque immediatement que $f(t)$ est de la forme:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{3} \lambda_k (t-k)\, u(t-k)$$

telle que $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$

La transformation de Laplace est linéaire et on a : $\mathcal{L}((t-a)\, u_a) = \dfrac{e^{-ap}}{p^2}$

Donc:

$$F(p) = \frac{1}{p^2} - 2\frac{e^{-p}}{p^2} + 2\frac{e^{-2p}}{p^2} - \frac{e^{-3p}}{p^2} = \frac{1-2e^{-p}+2e^{-2p}-e^{-3p}}{p^2} \boxed{\text{5 points}}$$

6. $H(p) = \dfrac{36}{p^2(p^2+2p-3)}$

Le trinôme $p^2+2p-3=0$ a 2 racines réelles : $p = 1, -3$ donc $p^2+2p-3 = (p-1)(p+3)$

$H(p)$ s'écrit :

$$H(p) = \frac{36}{p^2(p-1)(p+3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p-1} + \frac{D}{p+3} \boxed{\text{1 point}}$$

$$= \frac{(A+C+D)\,p^3 + (B+2A+3C-D)\,p^2 + (-3A+2B)\,p - 3B}{p^2(p^2+2p-3)}$$

$$\begin{cases} A+C+D=0 \\ B+2A+3C-D=0 \\ -3A+2B=0 \\ -3B=36 \end{cases} \Longrightarrow [A=-8, B=-12, C=9, D=-1] \quad \boxed{1\times 4 = 4 \text{ points}}$$

Ou autrement :

$$H \times p^2\big|_{p=0} \rightarrow \quad \left.\frac{36}{p^2(p+3)}\right|_{p=0} = Ap + B + \left.\frac{Cp^2}{p-1} + \frac{Dp^2}{p+3}\right|_{p=0} \Longrightarrow B = -12$$

$$H \times (p-1)\big|_{p=1} \rightarrow \quad \left.\frac{36}{p^2(p+3)}\right|_{p=1} = \frac{A(p-1)}{p} + \frac{B(p-1)}{p^2} + C + \left.\frac{D(p-1)}{p+3}\right|_{p=1} \Longrightarrow C = 9$$

$$H \times (p+3)\big|_{p=-3} \rightarrow \quad \left.\frac{36}{p^2(p-1)}\right|_{p=-3} = \frac{A(p+3)}{p} + \frac{B(p+3)}{p^2} + \frac{C(p+3)}{p-1} + D\Big|_{p=-3} \Longrightarrow D = -1$$

$$\left.\frac{36}{p^2(p-1)(p+3)}\right|_{p=2} = \frac{A}{p} - \frac{12}{p^2} + \frac{9}{p-1} - \left.\frac{1}{p+3}\right|_{p=2} \Leftrightarrow \frac{9}{5} = \frac{1}{2}A + \frac{29}{5} \Longrightarrow A = -8$$

$$H(p) = \frac{36}{p^2(p-1)(p+3)} = -\frac{8}{p} - \frac{12}{p^2} + \frac{9}{p-1} - \frac{1}{p+3} \boxed{\text{1 point}}$$

$\dfrac{1}{p} = \mathcal{L}(1) \qquad \dfrac{1}{p^2} = \mathcal{L}(t)$

$\dfrac{1}{p-1} = \mathcal{L}(e^t) \qquad \dfrac{1}{p+3} = \mathcal{L}(e^{-3t})$

Alors :

$$h(t) = \left(-8 - 12t + 9e^t - e^{-3t}\right) u_0(t) \boxed{\text{4 points}}$$

7. $y'' + 2y' - 3y = f(t)$

   L'équation image: $\mathcal{L}(y'') + 2\mathcal{L}(y') - 3\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(f)$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $\mathcal{L}(y) = Y(p) \qquad \mathcal{L}(y') = pY(p)$

   $\mathcal{L}(y'') = p^2 Y(p) \qquad \mathcal{L}(f) = F(p)$

   Donc :

   $p^2Y + 2pY - 3Y = F \Longrightarrow \left(p^2 + 2p - 3\right) Y = F$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $Y(p) = \dfrac{F}{p^2 + 2p - 3} = \dfrac{1 - 2e^{-p} + 2e^{-2p} - e^{-3p}}{p^2(p^2 + 2p - 3)}$

   $= \dfrac{1}{p^2(p^2+2p-3)} - 2\dfrac{e^{-p}}{p^2(p^2+2p-3)} + 2\dfrac{e^{-2p}}{p^2(p^2+2p-3)} - \dfrac{e^{-3p}}{p^2(p^2+2p-3)}$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $= \dfrac{1}{36}\left(H(p) - 2e^{-p}H(p) + 2e^{-2p}H(p) - e^{-3p}H(p)\right)$ $\boxed{\text{2 points}}$

   On obtient :

   $$y(t) = \frac{1}{36}\left(h(t) - 2h(t-1) + 2h(t-2) - h(t-3)\right) \boxed{\text{4 points}}$$

Exercice 2 (15 points) *Soit f une fonction admettant une transformée de Laplace: $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$, telle que:*

$$\int_0^t \frac{f(x)}{\sqrt{t-x}}dx = t^n; n \in \mathbb{N} \quad et \quad t > 0 \tag{1}$$

On donne : $\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \sqrt{\dfrac{\pi}{p}}$. et $1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 2n - 1 = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$

1. Trouver $F(p)$. (7 *points*)
2. Calculer $\mathcal{L}\left(t^{n-1/2}\right)$ à partir de $\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, en déduire f. (8 *points*)

Solution 2 *:*

1. L'équation (1) est équivalente à : $t^{-1/2} * f(t) = t^n$ $\boxed{\text{1 point}}$

   Alors : $\mathcal{L}\left(t^{-1/2} * f(t)\right) = \mathcal{L}(t^n) \Longleftrightarrow \mathcal{L}\left(t^{-1/2}\right)F = \mathcal{L}(t^n)$ $\boxed{\text{2 points}}$ ou bien $\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}F(p) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$ $\boxed{\text{2 points}}$

   Donc :

   $$F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}\sqrt{\frac{p}{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{n!}{p^{n+1/2}} \boxed{\text{2 points}}$$

2. On a $\forall n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{L}(t^n g(t)) = (-1)^n \dfrac{d^n}{dp^n}\mathcal{L}(g)$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $\mathcal{L}\left(t^{1-1/2}\right) = \mathcal{L}\left(t \times t^{-1/2}\right) = -\dfrac{d}{dp}\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = -\dfrac{d}{dp}\sqrt{\dfrac{\pi}{p}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\dfrac{1}{p^{3/2}}$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $\mathcal{L}\left(t^{2-1/2}\right) = -\dfrac{d}{dp}\mathcal{L}\left(t^{1-1/2}\right) = -\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\dfrac{1}{p^{3/2}}\right) = \sqrt{\pi}\dfrac{3}{2\times 2}\dfrac{1}{p^{5/2}}$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $\mathcal{L}\left(t^{3-1/2}\right) = -\dfrac{d}{dp}\mathcal{L}\left(t^{3-1/2}\right) = -\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{3\sqrt{\pi}}{2\times 2}\dfrac{1}{p^{5/2}}\right) = \sqrt{\pi}\dfrac{3\times 5}{2\times 2\times 2}\dfrac{1}{p^{7/2}}$

$$\mathcal{L}\left(t^{n-1/2}\right) = \sqrt{\pi}\frac{3\times 5\times 7\times\cdots\times 2n-1}{2\times 2\times 2\times\cdots\times 2}\frac{1}{p^{n+1/2}} = \sqrt{\pi}\frac{3\times 5\times 7\times\cdots\times 2n-1}{2^n}\frac{1}{p^{n+1/2}}\ \boxed{\text{1 point}}$$

$$1\times 3\times 5\times\cdots\times 2n-1 = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}\left(t^{n-1/2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!}\frac{1}{p^{n+1/2}}\ \boxed{\text{1 point}}$$

$$\frac{1}{p^{n+1/2}} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}}\frac{n!}{(2n)!}\mathcal{L}\left(t^{n-1/2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{n!}\mathcal{L}(f)\ \boxed{\text{1 point}} \Longrightarrow$$

$$f(t) = \frac{2^{2n}}{\pi}\frac{(n!)^2}{(2n)!}t^{n-1/2}\ \boxed{\text{2 points}}$$

Exercice 3 (50 points) *On considère la fonction $f_0(t)$ telle que*

$$f_0(t)\ \text{ est impaire, et } f_0(t) = t^2 \text{ sur } [0,1[$$

Soit $f(t)$ la fonction $2-$périodique et coincide avec $f_0(t)$ sur $]-1,1[$

I **<u>Calcul au sens des fonctions</u>** (20 *points*)

1. Tracer la graphe de $f(t)$ sur $]-3,3[$
2. Calculer la série de Fourier de la fonction $f(t)$.

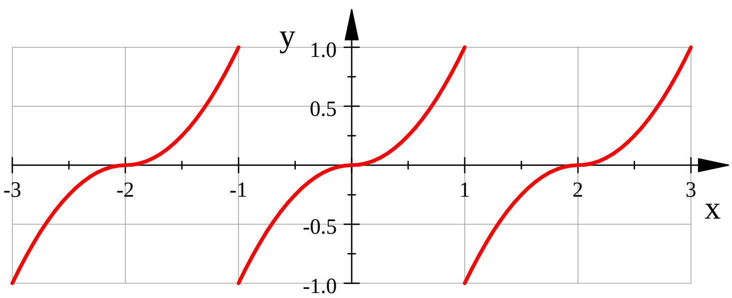
II **<u>Calcul au sens des distributions</u>** (30 *points*)

1. Exprimer $f_0(t)$ à l'aide de la fonction échelon unité.
2. Calculer au sens des distributions $[f_0]'$, $[f_0]''$et $[f_0]'''$.
3. Calculer la transformée de Fourier de $[f_0]'''$, en déduire celle de $f_0(t)$.
4. Retrouver la série de Fourier de la fonction $f(t)$.

Solution 3 *:*

I **<u>Calcul au sens des fonctions</u>**

1. Graphe: $\boxed{\text{5 points}}$



2. $f(t)$ est impaire donc $a_0 = a_n = 0$, et $T = 2 \Longrightarrow \omega = \pi$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $$b_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin n\omega t dt = \int_{-1}^{1} f(t)\sin n\pi t dt\ \boxed{\text{1 point}}$$

   Or $f(t)$ est impaire, et $\sin n\pi t$ est impaire donc $f(t)\sin n\pi t$ est paire
   Par suite :

$$b_n = 2\int_0^1 t^2 \sin n\pi t dt \boxed{\text{2 points}}$$

Par parties:

$$\begin{cases} u = t^2 & \Longrightarrow & du = 2tdt \\ dv = \sin n\pi t dt & \Longrightarrow & v = -\dfrac{\cos n\pi t}{n\pi} \end{cases} \boxed{\text{2 points}}$$

$$b_n = -2\left.\frac{t^2 \cos n\pi t}{n\pi}\right|_0^1 + \frac{4}{n\pi}\int_0^1 t\cos n\pi t dt$$

$$= -2\frac{\cos n\pi}{n\pi} + \frac{4}{n\pi}\int_0^1 t\cos n\pi t dt \boxed{\text{2 points}}$$

2eme fois par parties:

$$\begin{cases} u = t & \Longrightarrow & du = dt \\ \cos n\pi t dt & \Longrightarrow & v = \dfrac{\sin n\pi t}{n\pi} \end{cases} \boxed{\text{2 points}}$$

$$b_n = -2\frac{\cos n\pi}{n\pi} + \frac{4}{n\pi}\left\{\left.\frac{t\sin n\pi t}{n\pi}\right|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi t dt\right\}$$

$$\left.\frac{t\sin n\pi t}{n\pi}\right|_0^1 = \frac{1}{\pi n}\sin \pi n = 0$$

$$\Longrightarrow b_n = -2\frac{\cos n\pi}{n\pi} + \frac{4}{n\pi}\left\{-\frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi t dt\right\}$$

$$b_n = -2\frac{\cos n\pi}{n\pi} + \frac{4}{n\pi}\left\{-\frac{1}{n\pi}\left(-\frac{\cos n\pi t}{n\pi}\right)_0^1\right\}$$

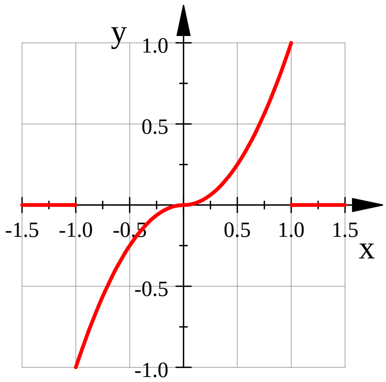
$$= -2\frac{\cos n\pi}{n\pi} + \frac{4}{n^3\pi^3}(\cos n\pi - 1)$$

$$= -2\frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{4}{n^3\pi^3}((-1)^n - 1) \boxed{\text{2 points}}$$

$$S(t) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{2}{n^3\pi^3}((-1)^n - 1)\right)\sin n\pi t \boxed{\text{2 points}}$$

II <u>Calcul au sens des distributions</u>

1. $f_0(t) = -t^2(u_{-1} - u_0) + t^2(u_0 - u_1) = t^2(-u_{-1} + 2u_0 - u_1)$ $\boxed{\text{2 points}}$



$f_0(t)$

2. $[f_0] = t^2\left[-u_{-1} + 2u_0 - u_1\right]$

- $[f_0]' = t^2\left[-u'_{-1} + 2u'_0 - u'_1\right] + 2t\left[-u_{-1} + 2u_0 - u_1\right]$ $\boxed{\text{1 point}}$
$= t^2\left(-\delta_{-1} + 2\delta_0 - \delta_1\right) + 2t\left[-u_{-1} + 2u_0 - u_1\right]$ $\boxed{\text{1 point}}$
$f(t)\,\delta_a = f(a)\,\delta_a \Longrightarrow -t^2\delta_{-1} + 2t^2\delta_0 - t^2\delta_1 = -\delta_{-1} - \delta_1 \Longrightarrow$
$$[f_0]' = -\delta_{-1} - \delta_1 + 2t\left[-u_{-1} + 2u_0 - u_1\right] \quad \boxed{\text{1 point}}$$
- $[f_0]'' = -\delta'_{-1} - \delta'_1 + 2\left[-u_{-1} + 2u_0 - u_1\right] + 2t\left[-u'_{-1} + 2u'_0 - u'_1\right]$ $\boxed{\text{1 point}}$
$= -\delta'_{-1} - \delta'_1 + 2\left[-u_{-1} + 2u_0 - u_1\right] + 2t\left(-\delta_{-1} + 2\delta_0 - \delta_1\right)$ $\boxed{\text{1 point}}$
$f(t)\,\delta_a = f(a)\,\delta_a \Longrightarrow -t\delta_{-1} + 2t\delta_0 - t\delta_1 = \delta_{-1} - \delta_1 \Longrightarrow$
$$[f_0]'' = -\delta'_{-1} - \delta'_1 + 2\left[-u_{-1} + 2u_0 - u_1\right] + 2\left(\delta_{-1} - \delta_1\right) \boxed{\text{1 point}}$$
- $[f_0]''' = -\delta''_{-1} - \delta''_1 + 2\left[-u'_{-1} + 2u'_0 - u'_1\right] + 2\left(\delta'_{-1} - \delta'_1\right)$ $\boxed{\text{1 point}}$
$= -\delta''_{-1} - \delta''_1 + 2\left(-\delta_{-1} + 2\delta_0 - \delta_1\right) + 2\left(\delta'_{-1} - \delta'_1\right)$ $\boxed{\text{1 point}}$
$$[f_0]''' = -\delta''_{-1} - \delta''_1 + 2\delta'_{-1} - 2\delta'_1 - 2\delta_{-1} + 4\delta_0 - 2\delta_1 \boxed{\text{1 point}}$$

3. $\mathcal{F}(\delta_a) = e^{-2j\pi\nu a} \qquad \mathcal{F}\left(\delta_a^{(n)}\right) = (2j\pi\nu)^n e^{-2j\pi\nu a}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\mathcal{F}\left([f_0]'''\right) = -(2j\pi\nu)^2 e^{2j\pi\nu} - (2j\pi\nu)^2 e^{-2j\pi\nu} + 2(2j\pi\nu)e^{2j\pi\nu} - 2(2j\pi\nu)e^{-2j\pi\nu} - 2e^{2j\pi\nu} + 4 - 2e^{-2j\pi\nu}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$= -(2j\pi\nu)^2\left(e^{2j\pi\nu} + e^{-2j\pi\nu}\right) + 2(2j\pi\nu)\left(e^{2j\pi\nu} - e^{-2j\pi\nu}\right) - 2\left(e^{2j\pi\nu} + e^{-2j\pi\nu}\right) + 4$ $\boxed{\text{1 point}}$

$= -(2j\pi\nu)^2(2\cos 2\pi\nu) + 2(2j\pi\nu)(2j\sin 2\pi\nu) - 2(2\cos 2\pi\nu) + 4$ $\boxed{\text{1 point}}$

$= 8\pi^2\nu^2\cos 2\pi\nu - 8\pi\nu\sin 2\pi\nu - 4\cos 2\pi\nu + 4$

$$\mathcal{F}\left([f_0]'''\right) = \left(8\pi^2\nu^2 - 4\right)\cos 2\pi\nu - 8\pi\nu\sin 2\pi\nu + 4 \quad \boxed{\text{1 point}}$$

$\mathcal{F}\left([f_0]'''\right) = (2j\pi\nu)^3\,\mathcal{F}([f_0]) = (2j\pi\nu)^3 F_0(\nu) = -8j\pi^3\nu^3 F_0$ $\boxed{\text{2 points}}$

$$F_0(\nu) = \frac{\left(8\pi^2\nu^2 - 4\right)\cos 2\pi\nu - 8\pi\nu\sin 2\pi\nu + 4}{-8j\pi^3\nu^3}$$

$$F_0(\nu) = j\frac{\left(2\pi^2\nu^2 - 1\right)\cos 2\pi\nu - 2\pi\nu\sin 2\pi\nu + 1}{2\pi^3\nu^3} \boxed{\text{2 points}}$$

4. Les coefficients complexe de Fourier associés à $f(t)$ se déterminet par la relation: $C_n = \frac{1}{T}F_0\left(\frac{n}{T}\right)$

on a $T = 2$ donc $C_n = \frac{1}{2}F_0\left(\frac{n}{2}\right)$ $\boxed{\text{2 points}}$

$$C_n = \frac{j}{2}\frac{\left(2\pi^2(n/2)^2 - 1\right)\cos 2\pi(n/2) - 2\pi(n/2)\sin 2\pi(n/2) + 1}{2\pi^3(n/2)^3} \boxed{\text{3 points}}$$

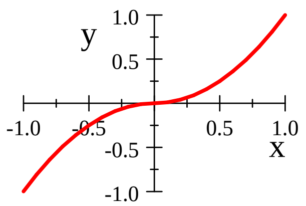
$2\pi^2(n/2)^2 = \frac{1}{2}\pi^2 n^2 \qquad 2\pi^3(n/2)^3 = \frac{1}{4}\pi^3 n^3$
$\cos 2\pi(n/2) = \cos\pi n = (-1)^n \qquad \sin 2\pi(n/2) = \sin\pi n = 0$

$$C_n = \frac{j}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\pi^2 n^2 - 1\right)(-1)^n + 1}{\frac{1}{4}\pi^3 n^3} = \frac{j}{2}\frac{2}{\pi^3 n^3}\left((-1)^n \pi^2 n^2 - 2(-1)^n + 2\right) \boxed{\text{2 points}}$$

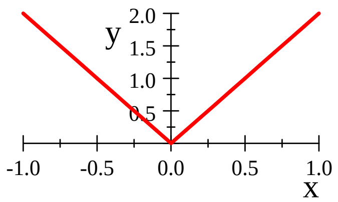
$$\begin{aligned} b_n &= -2\,\mathrm{Im}\,C_n = -\frac{2}{\pi^3 n^3}\left((-1)^n \pi^2 n^2 - 2(-1)^n + 2\right) \\ &= -2\frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{4}{n^3\pi^3}\left((-1)^n - 1\right) \boxed{\text{3 points}} \end{aligned}$$

<u>Autre méthode de calcul $[f_0]'''$:</u>

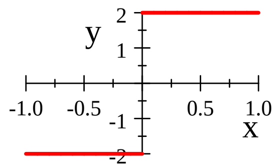
$$f_0(t) = \begin{cases} t^2 & si\ t \in]0,1[\\ -t^2 & si\ t \in]-1,0[\\ 0 & non \end{cases},\ f_0'(t) = \begin{cases} 2t & si\ t \in]0,1[\\ -2t & si\ t \in]-1,0[\\ 0 & non \end{cases},\ f_0''(t) = \begin{cases} 2 & si\ t \in]0,1[\\ -2 & si\ t \in]-1,0[\\ 0 & non \end{cases}$$



f_0



f_0'



f_0''

$f_0(t)$ a 2 points de discontinuités:

$t_1 = -1 : \Delta f_0(-1) = f_0(-1^+) - f_0(-1^-) = -1 - 0 = -1$

$t_1 = 1 : \Delta f_0(1) = f_0(1^+) - f_0(1^-) = 0 - (1) = -1$

$[f_0]' = [f_0'] - \delta_{-1} - \delta_1$

$f_0'(t)$ a 2 points de discontinuités:

$t_1 = -1 : \Delta f_0'(-1) = f_0'(-1^+) - f_0'(-1^-) = 2 - 0 = 2$

$t_2 = 1 : \Delta f_0'(1) = f_0'(-1^+) - f_0'(-1^-) = 0 - 2 = -2$

$[f_0]'' = [f_0']' - \delta_{-1}' - \delta_1' = [f_0''] + 2\delta_{-1} - 2\delta_1 - \delta_{-1}' - \delta_1'$

$f_0''(t)$ a 3 points de discontinuités:

$t_1 = -1 : \Delta f_0''(-1) = f_0''(-1^+) - f_0''(-1^-) = -2 - 0 = -2$

$t_2 = 0 : \Delta f_0''(0) = f_0''(0^+) - f_0''(0^-) = 2 - (-2) = 4$

$t_3 = 1 : \Delta f_0''(1) = f_0''(1^+) - f_0''(1^-) = 0 - 2 = -2$

$f_0'''(t) = 0$

$[f_0'']' = -2\delta_{-1} + 4\delta_0 - 2\delta_1$

$[f_0]''' = -2\delta_{-1} + 4\delta_0 - 2\delta_1 + 2\delta_{-1}' - 2\delta_1' - \delta_{-1}'' - \delta_1''$

$$[f_0]''' = -\delta_{-1}'' - \delta_1'' + 2\delta_{-1}' - 2\delta_1' - 2\delta_{-1} + 4\delta_0 - 2\delta_1$$