Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Signal déterministe (MAA107)

Examen Final 2013-2014 - Semestre I

Solutions

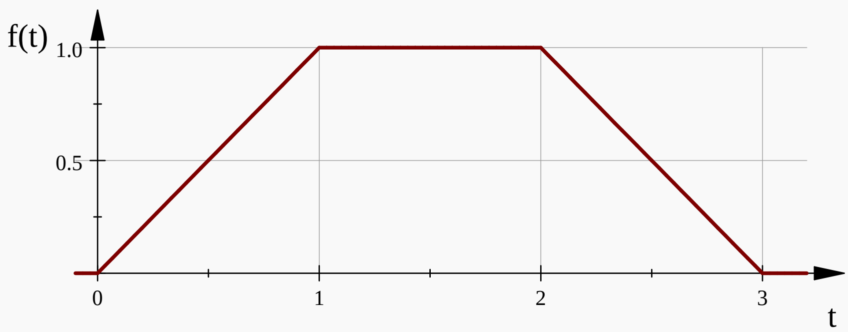
Exercice 1 (40 points) On définit la fonction $f(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} t & si \quad 0 \le t \le 1 \\ 1 & si \quad 1 \le t \le 2 \\ 3-t & si \quad 2 \le t \le 3 \end{cases} \quad \text{et nulle ailleurs}$$

1. Tracer la courbe représentative de $f(t)$.
2. Exprimer $f(t)$ à l'aide de la fonction échelon unité.
3. Calculer $F(p)$ la transformée de Laplace de $f(t)$.
4. Soit
$$G_a(p) = \frac{e^{-ap}}{p^6 - 16p^2}$$
Déterminer la fonction temporelle $g_a(t)$ telle que $G_a(p)$ est sa transformée de Laplace
5. En utilisant la transformée de Laplace, déduire la solution de l'équation différentielle :
$$\frac{d^4y}{dt^4} - 16y = f(t)$$
où $y(t)$ est une fonction causale vérifiant les conditions :
$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$$

Solution 1

1. Graphe :



2. Posons $u_a(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t > a \\ 0 & si \quad t < a \end{cases}$

$$\begin{aligned} f(t) &= t(u_0 - u_1) + (u_1 - u_2) + (3-t)(u_2 - u_3) \\ &= tu_0 - (t-1)u_1 - (t-2)u_2 + (t-3)u_3 \end{aligned}$$

3. La transformée de Laplace de la fonction causale $h(t) = tu_0$ est $H(p) = \frac{1}{p^2}$ alors la transformée de $h(t-a) = (t-a)u_a$ est $\frac{e^{-ap}}{p^2}$.

On déduit la transformée de $f(t)$:

$$F(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-2p}}{p^2} + \frac{e^{-3p}}{p^2} = \frac{1 - e^{-p} - e^{-2p} + e^{-3p}}{p^2}$$

4. Cherchons tout d'abord la transformée inverse de $G_0(p) = \frac{1}{p^6 - 16p^2} = \frac{1}{p^2(p^4 - 16)}$

En décomposant $G_0(p)$ en fractions simples on obtient :

$$\begin{aligned} G_0(p) &= \frac{1}{p^2(p^4-16)} = -\frac{1}{16p^2} + \frac{1}{128(p-2)} - \frac{1}{128(p+2)} + \frac{1}{32(p^2+4)} \\ &= -\frac{1}{16}\mathcal{L}(tu_0) + \frac{1}{128}\mathcal{L}\left(e^{2t}u_0\right) - \frac{1}{128}\mathcal{L}\left(e^{-2t}u_0\right) + \frac{1}{64}\mathcal{L}(u_0 \sin 2t) \end{aligned}$$

donc :

$$g_0(t) = \frac{1}{128}\left(-8t + e^{2t} - e^{-2t} + 2\sin 2t\right)u_0$$

ou bien :

$$g_0(t) = \frac{1}{64}(-4t + \sinh 2t + \sin 2t)u_0$$

$$G_a(p) = \frac{e^{-ap}}{p^6 - 16p^2} = e^{-ap}G_0(p) \Longrightarrow g_a(t) = g_0(t-a)$$

5. Soit $Y = \mathcal{L}(y)$

comme $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0 \Longrightarrow \mathcal{L}\left(y^{(4)}\right) = p^4 Y$

L'équation image est : $p^4Y - 16Y = F(p)$

donc

$$Y = \frac{F(p)}{p^4 - 16} = \frac{1 - e^{-p} - e^{-2p} + e^{-3p}}{p^2(p^4 - 16)}$$

en fonction de $G_a(p)$, la fonction Y s'écrit :

$$Y(p) = G_0 - G_1 - G_2 + G_3$$

D'où

$$y(t) = g_0(t) - g_1(t) - g_2(t) + g_3(t)$$

Exercice 2 (40 points) Soit $f = f(t)$ une fonction **impaire** définie sur $[-1, 1]$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad |t| > 1 \\ t(t-1) & si \quad 0 \le t \le 1 \end{cases} \tag{1}$$

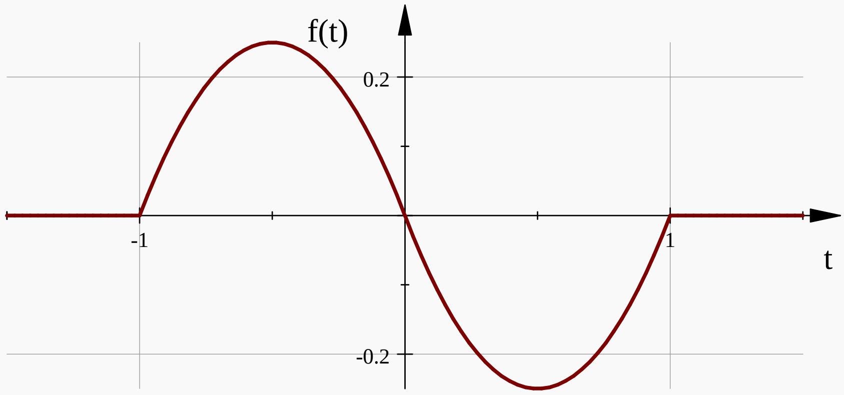
1. Tracer le graphe de f

2. Calculer, au sens des distributions, les dérivées de $f(t)$ jusqu'à l'ordre 3.
3. Calculer la transformée de Fourier de la distribution régulière associée à f''' .
4. En déduire $F(\nu)$, la transformée de Fourier de f.
5. Soit $g(t)$ la fonction $2-$ périodique et qui coincide avec $f(t)$ sur $[-1,1]$
   (a) Tracer le graphe de $g(t)$ sur $[-3,3]$
   (b) Calculer la série de Fourier associée à $g(t)$.

Solution 2

$f(t) = t(t-1) = t^2 - t$ si $t \in [0,1]$ et $f(t)$ impaire $\Longrightarrow f(-t) = -f(t)$

1. Graphes



2. $f(t)$ est une fonction impaire, elle est définie sur $[0,1]$ par $f(t) = t^2 - t$ donc sur $[-1,0]$: $f(t) = -f(-t) = -\left(t^2+t\right)$
   La fonction $f(t)$ s'écrit :

$$f(t) = \begin{cases} -\left(t^2+t\right) & -1 \le t \le 0 \\ t^2 - t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

Soit en fonction de l'échelon unité :
$f(t) = -\left(t^2+t\right)(u_{-1} - u_0) + \left(t^2-t\right)(u_0 - u_1)$ ou bien

$$f(t) = 2t^2u_0 - \left(t^2-t\right)u_1 - \left(t^2+t\right)u_{-1}$$

Soit
$[f] = -\left(t^2+t\right)[u_{-1}] + 2t^2[u_0] - \left(t^2-t\right)[u_1]$
$[f]' = -\left(t^2+t\right)[u_{-1}]' - (2t+1)[u_{-1}] + 2t^2[u_0]' + 4t[u_0]' - \left(t^2-t\right)[u_1]' - (2t-1)[u_1]$
$= -\left(t^2+t\right)\delta_{-1} - (2t+1)[u_{-1}] + 2t^2\delta + 4t[u_0] - \left(t^2-t\right)\delta_1 - (2t-1)[u_1]$
$= -(2t+1)[u_{-1}] + 4t[u_0] - (2t-1)[u_1]$
$[f]'' = -(2t+1)[u_{-1}]' - 2[u_{-1}] + 4t[u_0]' + 4[u_0] - (2t-1)[u_1]' - 2[u_1]$
$= -(2t+1)\delta_{-1} - 2[u_{-1}] + 4t\delta + 4[u_0] - (2t-1)\delta_1 - 2[u_1]$
$= \delta_{-1} - 2[u_{-1}] + 4[u_0] - \delta_1 - 2[u_1]$
$[f]''' = \delta'_{-1} - 2[u_{-1}]' + 4[u_0]' - \delta'_1 - 2[u_1]'$
$= \delta'_{-1} - 2\delta_{-1} + 4\delta - \delta'_1 - 2\delta_1$

$$\mathcal{F}\left([f]'''\right) = \mathcal{F}\left[\delta'_{-1} - 2\delta_{-1} + 4\delta - \delta'_1 - 2\delta_1\right]$$

On a $\mathcal{F}\left(\delta_a^{(n)}\right) = (2j\pi\nu)^n e^{-2j\pi\nu a}$

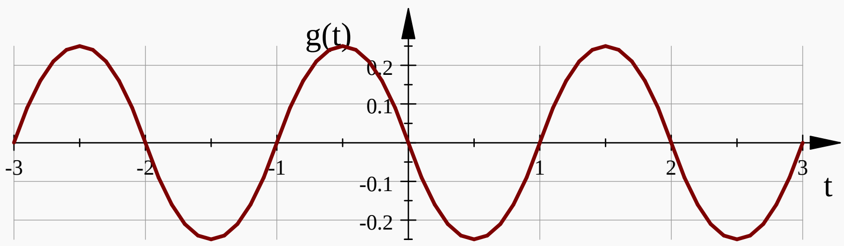
donc

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left([f]'''\right) &= 2j\pi\nu e^{2j\pi\nu} - 2e^{2j\pi\nu} + 4 - 2j\pi\nu e^{-2j\pi\nu} - 2e^{-2j\pi\nu} \\ &= 2j\pi\nu\left(e^{2j\pi\nu} - e^{-2j\pi\nu}\right) - 2\left(e^{2j\pi\nu} + e^{-2j\pi\nu}\right) + 4 \\ &= -4\pi\nu\sin 2\pi\nu - 4\cos 2\pi\nu + 4\end{aligned}$$

3. On sait que : $\mathcal{F}\left(T_f'''\right) = (2j\pi\nu)^3 F(\nu)$

$$F(\nu) = \frac{-4\pi\nu\sin 2\pi\nu - 4\cos 2\pi\nu + 4}{8j^3\pi^3\nu^3} = \frac{j}{2\pi^3\nu^3}\left(1 - \pi\nu\sin 2\pi\nu - \cos 2\pi\nu\right)$$

4. Graphe de $g(t)$



5. On déduire les coefficients complexes de Fourier en utilisant la relation $C_n = \frac{1}{T}F\left(\frac{n}{T}\right)$

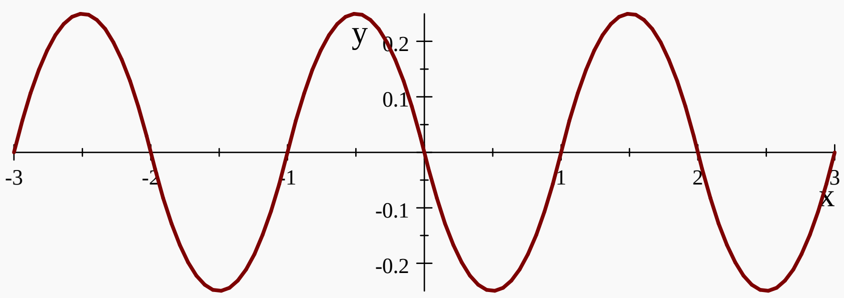
$$C_n = \frac{1}{2}\frac{j}{2\pi^3(n/2)^3}\left(1 - \pi(n/2)\sin 2\pi(n/2) - \cos 2\pi(n/2)\right)$$

$$= \frac{2j}{\pi^3 n^3}(1 - \cos n\pi) = \frac{2j}{\pi^3 n^3}\left(1 - (-1)^n\right)$$

$$b_n = -2\,\mathrm{Im}(C_n) = -\frac{4}{\pi^3 n^3}\left(1 - (-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & si \quad n = 2k \\ -\dfrac{8}{\pi^3(2k+1)^3} & si \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

Finalement :

$$S(t) = -\frac{8}{\pi^3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin(2k+1)\pi t}{(2k+1)^3}$$



graphe de $-\frac{8}{\pi^3}\sum_{k=0}^{10}\frac{\sin(2k+1)\pi t}{(2k+1)^3}$

Remarque 0.1

On peut calculer T_f''', à l'aide d'une autre méthode :
On a $[f]' = [f'] + \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \Delta f(a_n)\, \delta(t - a_n)$
a_n sont les points de discontinuité de première espèce de $f(t)$
La fonction $f(t)$ est continue sur $[-1, 1]$ alors $[f]' = [f']$
$[f]'' = [f''] + \delta(t+1) - \delta(t-1)$
$[f]''' = \delta'(t+1) - \delta'(t-1) - 2\delta(t+1) - 2\delta(t-1) + 4\delta$

Exercice 3 (20 points) On désigne par $h(t)$ une fonction de classe C^2.
On définit la distribution : $T = e^{at}\delta'' * [h]$ où $[h]$ est la distribution régulière associée à $h(t)$.

1. Montrer (au sens de distribution) que :
$$e^{at}\delta'' = \delta'' - 2a + a^2\delta$$
2. Démontrer que T est une distribution régulière associée à une fonction $f(t)$.
3. Montrer que
$$f(t) = a^2 h(t) - 2ah'(t) + h''(t)$$
en fonction de h, h'et h''
4. En utilisant la transformation de Laplace, déterminer la fonction causale $h(t)$,telle que
$$e^{at}\delta'' * [h] = \delta \text{ et } h(0) = h'(0) = 0$$

Solution 3

1. Soit $\varphi(t)$ une fonction test
On a
$e^{at}\delta'' = \langle e^{at}\delta'', \varphi(t)\rangle = \left\langle \delta(t), \left(e^{at}\varphi\right)''\right\rangle$
$\left(e^{at}\varphi\right)' = (a\varphi + \varphi')\, e^{at}$
$\left(e^{at}\varphi\right)'' = \left(a\varphi' + \varphi'' + a^2\varphi + a\varphi'\right) e^{at} = \left(a^2\varphi + 2a\varphi' + \varphi''\right) e^{at}$
$e^{at}\delta'' = \left\langle \delta(t), \left(a^2\varphi + 2a\varphi' + \varphi''\right) e^{at}\right\rangle$
$\quad = a^2\left\langle \delta(t), \varphi e^{at}\right\rangle + 2a\left\langle \delta(t), \varphi' e^{at}\right\rangle + \left\langle \delta(t), \varphi'' e^{at}\right\rangle$
$\quad = a^2\left\langle \delta(t), \varphi e^{at}\right\rangle - 2a\left\langle \delta'(t), \varphi e^{at}\right\rangle + \left\langle \delta''(t), \varphi e^{at}\right\rangle$
alors :
$$e^{at}\delta'' = \delta'' - 2a + a^2\delta$$
2. $\langle T, \varphi\rangle = \left\langle e^{at}\delta'' * [h], \varphi\right\rangle$
$\left\langle e^{at}\delta''(t), \varphi(t+s)\right\rangle = \left\langle \delta''(t), e^{at}\varphi(t+s)\right\rangle = \left\langle \delta(t), \left(e^{at}\varphi(t+s)\right)''\right\rangle$
$= \dfrac{d^2}{dt^2}\left[e^{at}\varphi(t+s)\right](t=0) = a^2\varphi(s) + 2a\varphi'(s) + \varphi''(s)$

alors $\langle T, \varphi \rangle = \left\langle [h], a^2\varphi(s) + 2a\varphi'(s) + \varphi''(s) \right\rangle$
$= a^2 \langle h, \varphi(s) \rangle + 2a \langle h, \varphi'(s) \rangle + \langle h, \varphi''(s) \rangle$
Or $\left\langle h^{(k)}, \varphi \right\rangle = (-1)^k \left\langle h, \varphi^{(k)} \right\rangle$ donc

$$\langle T, \varphi \rangle = a^2 \langle h, \varphi \rangle - 2a \langle h', \varphi \rangle + \langle h'', \varphi \rangle$$

Ce qui montre que T est une distribution régulière.

3. La distribution $T = [f]$ s'écrit :

$$\langle T, \varphi \rangle = a^2 \langle h, \varphi \rangle - 2a \langle h', \varphi \rangle + \langle h'', \varphi \rangle = \langle a^2 h - 2ah' + h'', \varphi \rangle$$

et en déduit directement :

$$f(t) = a^2 h(t) - 2ah'(t) + h''(t)$$

4. $e^{at}\delta'' * [h] = [f] = \delta \Longleftrightarrow a^2 h(t) - 2ah'(t) + h''(t) = \delta$
En utilisant la Transformation de Laplace :
$\mathcal{L}\left(a^2 h - 2ah' + h''\right) = \mathcal{L}(\delta)$
$\Longrightarrow a^2 H - 2apH + p^2 H = 1$
On déduit : $H = \dfrac{1}{a^2 - 2ap + p^2} = \dfrac{1}{(p-a)^2} = \mathcal{L}\left(te^{at}\right)$

$$h(t) = u(t)\, te^{at}$$