Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Signal Déterministe - MAA107

Examen Final 2014-2015-Semestre I **Durée : 2h :00**

centres de : Beyrouth, Baakline, Baalbek, Ghazza,Tripoli, Bickfaya, Nahr Ibrahim

Solution

Exercice 1 (35 points) Soit $g(t)$ une fonction continue, n fois dérivable et a est un réel positif. On pose $A_0 = g(a), A_1 = g'(a)$ et $A_2 = g''(a)$, on désigne par $\delta_a = \delta(t-a)$ la distribution de Dirac.

1. Calculer de deux façons différentes $(g(t)\delta_a)'$et montrer que :
$$g(t)\delta'_a = A_0\delta'_a - A_1\delta_a$$
2. Sachant que $g\delta_a^{(n)} = (-1)^n (g\varphi)^{(n)}$ montrer que :
$$g(t)\delta''_a = A_0\delta''_a - 2A_1\delta'_a + A_2\delta_a$$
3. Déduire des expressions simplifiées des distributions suivantes :

(a) $e^{-t}\delta'_2$ (b) $e^{-t}\delta''_0$ (c) $t\cos t\delta'_\pi$ (d) $t^2\delta''_a$

Solution 1

1. En utilisant la dérivée du produit d'une fonction par une distribution on aura :
$(g(t)\delta_a)' = g'(t)\delta_a + g(t)\delta'_a$
$= g'(a)\delta_a + g(t)\delta'_a = A_1\delta_a + g(t)\delta'_a$ $\boxed{\text{5 points}}$
d'autre part : $g(t)\delta_a = g(a)\delta_a = A_0\delta_a$, donc $(g(t)\delta_a)' = (A_0\delta_a)' = A_0\delta'_a$ $\boxed{\text{3 points}}$
alors : $(g(t)\delta_a)' = A_1\delta_a + g(t)\delta'_a = A_0\delta'_a$ d'où :
$$g(t)\delta'_a = A_0\delta'_a - A_1\delta_a \boxed{\text{2 points}}$$
2. Si $\varphi(t)$ est une fonction test on a :
$(g\varphi)'' = ((g\varphi)')' = (g'\varphi + g\varphi')'$
$= g''\varphi + 2g'\varphi' + g\varphi''$ $\boxed{\text{5 points}}$
$g\delta''_a = \langle g\delta''_a, \varphi\rangle = \langle \delta''_a, g\varphi\rangle = (-1)^2 \langle \delta_a, g''\varphi + 2g'\varphi' + g\varphi''\rangle$
$= g''(a)\varphi(a) + 2g'(a)\varphi'(a) + g(a)\varphi''(a)$ $\boxed{\text{5 points}}$
on a : $\varphi(a) = \delta_a, \varphi'(a) = -\delta'_a$ et $\varphi''(a) = \delta''_a$
alors : $g\delta''_a = g''(a)\delta_a - 2g'(a)\delta'_a + g(a)\delta''_a$ soit
$$g\delta''_a = A_2\delta_a - 2A_1\delta'_a + A_0\delta''_a \boxed{\text{3 points}}$$

3. En utilisant les relations précédentes :

(a) $g(t) = e^{-t}, a = 2$: donc $A_0 = e^{-2}, g' = -e^{-t}$ donc $A_1 = -e^{-2}$
$e^{-t}\delta_2' = A_0\delta_2' - A_1\delta_2 = e^{-2}(\delta_2 + \delta_2')$

$$e^{-t}\delta_2' = e^{-2}(\delta_2 + \delta_2') \boxed{\text{3 points}}$$

(b) $g(t) = e^{-t}, g' = -e^{-t}$ et $g'' = e^{-t}$
$A_0 = g(0) = 1, A_1 = g'(0) = -1$ et $A_2 = g''(0) = 1$

$$e^{-t}\delta'' = \delta + 2\delta' + \delta'' \boxed{\text{3 points}}$$

(c) $g = t\cos t \quad a = \pi \Longrightarrow A_0 = \pi\cos\pi = -\pi$
$g' = \cos t - t\sin t \Longrightarrow A_1 = \cos\pi - \pi\sin\pi = -1$

$$t\cos t\delta_\pi' = -\pi\delta_\pi' + \delta_\pi \boxed{\text{3 points}}$$

(d) $g = t^2, a = a \Longrightarrow A_0 = a^2$
$g' = 2t \Longrightarrow A_1 = 2a \qquad g'' = 2 \Longrightarrow A_2 = 2$

$$t^2\delta_a'' = 2\delta_a - 4a\delta_a' + a^2\delta_a'' \boxed{\text{3 points}}$$

Exercice 2 (10 points) Soit S et T deux distributions telles que : $T = Se^{-at}$, $a \in \mathbb{R}$.
Montrer que si T vérifie l'équation différentielle : $T' + aT = 0$ alors S est constante.

Solution 2

On a : $T' = \left(Se^{-at}\right)' = S'e^{-at} - aSe^{-at}$ $\boxed{\text{3 points}}$
$T' + aT = S'e^{-at} - aSe^{-at} + aSe^{-at} = S'e^{-at}$ $\boxed{\text{2 points}}$
Si $T' + aT = 0 \Longleftrightarrow S'e^{-at} = 0 \Longrightarrow S' = 0$ donc S est une distribution constante. $S = C$ et $T = Ce^{-at}$ $\boxed{\text{5 points}}$

Exercice 3 (55 points) On désigne par f la fonction définie par :

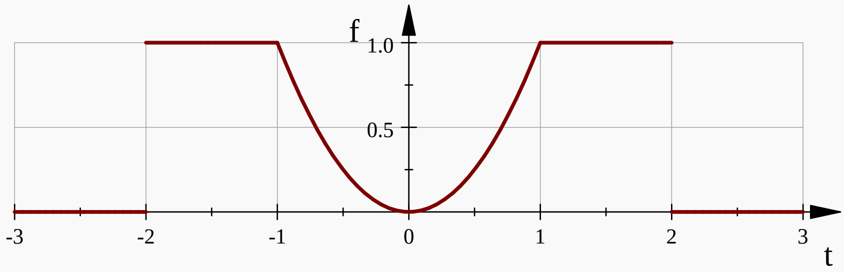
$$\begin{cases} t^2 & si \quad -1 < t < 1 \\ 1 & si \quad -2 < t < -1 \\ 1 & si \quad 1 < t < 2 \\ 0 & si \quad t \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[\end{cases}$$

et $[f]$ la distribution régulière associée à f.

1. Tracer f
2. Calculer au sens des distributions $[f]'$, $[f]''$ et $[f]'''$
3. Calculer la transformée de Fourier de $[f]'''$ et déduire celle de $[f]$
4. Soit $g(t)$ la fonction 4−périodique qui coïncide avec $f(t)$ sur $]-2, 2[$, déterminer la série de Fourier de $g(t)$

Solution 3

1. graphe : $\boxed{5 \text{ points}}$



2. En fonction de l'échelon unité, $f(t)$ s'exprime :
$$f(t) = u_{-2} - u_{-1} + t^2(u_{-1} - u_1) + u_1 - u_2$$

$$\begin{aligned}[f]' &= \delta_{-2} - \delta_{-1} + 2t[u_{-1} - u_1] + t^2(\delta_{-1} - \delta_1) + \delta_1 - \delta_2 \\ &= \delta_{-2} - \delta_{-1} + 2t[u_{-1} - u_1] + (\delta_{-1} - \delta_1) + \delta_1 - \delta_2 \\ &= \delta_{-2} + 2t[u_{-1} - u_1] - \delta_2 \ \boxed{5 \text{ points}}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}[f]'' &= \delta'_{-2} + 2[u_{-1} - u_1] + 2t[\delta_{-1} - \delta_1] - \delta'_2 \\ &= \delta'_{-2} + 2[u_{-1} - u_1] - 2\delta_{-1} - 2\delta_1 - \delta'_2 \ \boxed{5 \text{ points}}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}[f]''' &= \delta''_{-2} + 2\delta_{-1} - 2\delta_1 - 2\delta'_{-1} - 2\delta'_1 - \delta''_2 \\ &= \delta''_{-2} - \delta''_2 - 2(\delta'_{-1} + \delta'_1) + 2(\delta_{-1} - \delta_1) \ \boxed{5 \text{ points}}\end{aligned}$$

3. $\mathcal{F}([f]''') = \mathcal{F}\left(\delta''_{-2} - \delta''_2 - 2(\delta'_{-1} + \delta'_1) + 2(\delta_{-1} - \delta_1)\right)$

On sait que $\mathcal{F}\left(\delta_a^{(n)}\right) = (2j\pi\nu)^n e^{-2j\pi\nu a}$ alors :

- $\mathcal{F}(\delta_a) = e^{-2j\pi\nu a} \Longrightarrow \mathcal{F}(\delta_1) = e^{-2j\pi\nu}$ et $\mathcal{F}(\delta_{-1}) = e^{2j\pi\nu}$
- $\mathcal{F}(\delta'_a) = 2j\pi\nu e^{-2j\pi\nu a} \Longrightarrow \mathcal{F}(\delta'_1) = 2j\pi\nu e^{-2j\pi\nu}$ et $\mathcal{F}(\delta'_{-1}) = 2j\pi\nu e^{2j\pi\nu}$
- $\mathcal{F}(\delta''_a) = -4\pi^2\nu^2 e^{-2j\pi\nu a} \Longrightarrow \mathcal{F}(\delta''_{-2}) = -4\pi^2\nu^2 e^{4j\pi\nu}$ et $\mathcal{F}(\delta''_2) = -4\pi^2\nu^2\nu e^{-4j\pi\nu}$

d'où :

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}([f]''') = -4\pi^2\nu^2 e^{4j\pi\nu} + 4\pi^2\nu^2 e^{-4j\pi\nu} - 2\left(2j\pi\nu e^{2j\pi\nu} + 2j\pi\nu e^{-2j\pi\nu}\right) + 2\left(e^{2j\pi\nu} - e^{-2j\pi\nu}\right) \\ &= -4\pi^2\nu^2\left(e^{4j\pi\nu} - e^{-4j\pi\nu}\right) - 4j\pi\nu\left(e^{2j\pi\nu} + e^{-2j\pi\nu}\right) + 2\left(e^{2j\pi\nu} - e^{-2j\pi\nu}\right) \ \boxed{5 \text{ points}} \\ &= -4\pi^2\nu^2(2j\sin 4\pi\nu) - 4j\pi\nu(2\cos 2\pi\nu) + 2(2j\sin 2\pi\nu) \\ &= -8j\pi^2\nu^2 \sin 4\pi\nu - 8j\pi\nu\cos 2\pi\nu + 4j\sin 2\pi\nu \ \boxed{5 \text{ points}}\end{aligned}$$

On a $\mathcal{F}([f]''') = (2j\pi\nu)^3 \mathcal{F}([f]) = -8j\pi^3\nu^3 F(\nu)$

$$F(\nu) = \frac{\mathcal{F}([f]''')}{-8j\pi^3\nu^3} = \frac{-8j\pi^2\nu^2\sin 4\pi\nu - 8j\pi\nu\cos 2\pi\nu + 4j\sin 2\pi\nu}{-8j\pi^3\nu^3}$$
$$= \frac{1}{2\pi^3\nu^3}\left(2\pi^2\nu^2\sin 4\pi\nu - \sin 2\pi\nu + 2\pi\nu\cos 2\pi\nu\right) \ \boxed{5 \text{ points}}$$

4. $C_n = \frac{1}{a}F\left(\frac{n}{a}\right) = \frac{1}{4}F\left(\frac{n}{4}\right)$

$$= \frac{1}{4}\frac{4^3}{2\pi^3 n^3}\left(\frac{2\pi^2 n^2}{16}\sin n\pi - \sin\frac{\pi n}{2} + \pi\frac{n}{2}\cos\frac{n\pi}{2}\right)$$
$$= \frac{8}{\pi^3 n^3}\left(-\sin\frac{\pi n}{2} + \pi\frac{n}{2}\cos\frac{n\pi}{2}\right) \ \boxed{5 \text{ points}}$$

- Si n est pair : $n = 2k \Longrightarrow \begin{cases}\sin\frac{\pi n}{2} = \sin k\pi = 0 \\ \cos\frac{n\pi}{2} = \cos k\pi = (-1)^k\end{cases}$

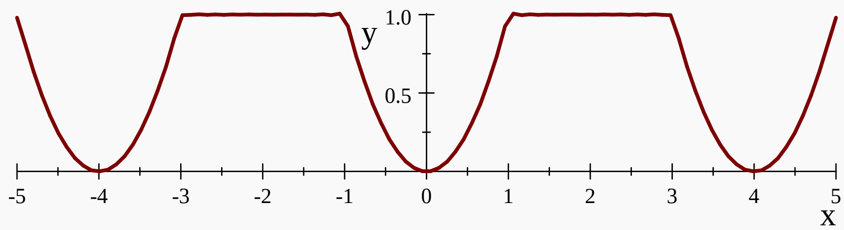
$$C_{2k} = \frac{1}{\pi^3 k^3}\left(k\pi(-1)^k\right) = \frac{(-1)^k}{\pi^2 k^2} \Longrightarrow \begin{cases} b_{2k} = 0 \\ a_{2k} = 2\frac{(-1)^k}{\pi^2 k^2}\end{cases} \ \boxed{5 \text{ points}}$$

– Si n est impaire : $n = 2k+1 \Longrightarrow \begin{cases} \sin \frac{\pi n}{2} = \sin(2k+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^k \\ \cos \frac{n\pi}{2} = \cos(2k+1)\frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$

$$C_{2k+1} = -\frac{8(-1)^k}{\pi^3 (2k+1)^3} \Longrightarrow \begin{cases} b_{2k+1} = 0 \\ a_{2k+1} = -\frac{16(-1)^k}{\pi^3(2k+1)^3} \end{cases} \quad \boxed{\text{5 points}}$$

$$C_0 = \frac{1}{4}\left(\int_{-2}^{-1} dt + \int_{-1}^{1} t^2 dt + \int_{1}^{2} dt\right) = \frac{2}{3}$$

$$S(t) = \frac{2}{3} - \frac{16}{\pi^3}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \cos \frac{2k+1}{2}\pi t}{(2k+1)^3} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k \cos k\pi t}{k^2} \quad \boxed{\text{5 points}} \tag{1}$$



$$\frac{2}{3} - \frac{16}{\pi^3}\sum_{k=0}^{10} \frac{(-1)^k \cos \frac{2k+1}{2}\pi t}{(2k+1)^3} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{10}\frac{(-1)^k \cos k\pi t}{k^2}$$