Institut Supérieur de Sciences Appliquées et Économiques
Centre du Liban associé au
Conservatoire National des Arts et Métiers
le cnam Liban

Signal déterministe (MAA107)

Examen Final 2016-2017 **Durée : 2h :00**

SOLUTION

Exercice 1 (40 points) Soit la fonction $f(t) = \begin{cases} \omega \cos \omega t & si\ |t| \leq \dfrac{\pi}{2\omega} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$ où ω est un réel

1. Calculer $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$. Que devient la valeur de I si $\omega \to +\infty$.
2. Calculer au sens des fonctions les dérivées première f' et seconde f''de $f(t)$ .Tracer les courbes de f, f' et f''
3. On désigne par T la distribution régulière associée à $f(t)$ .Calculer au sens des distributions les dérivées T' et T''
4. Calculer la transformée de Fourier de T''. Déduire la transformée de f.
5. En calculant la limite de $\mathcal{F}(T'')$ quand $\omega \to \infty$, déduire celle de f dans $\mathcal{D}'$.
6. Soit $g(t)$ la fonction $\dfrac{\pi}{\omega}$−périodique, qui coïncide avec $f(t)$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2\omega}, \dfrac{\pi}{2\omega}\right]$. Déduire la série réelle de Fourier de $g(t)$.

   On donne : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{1 - x^2} = 1$.

SOLUTION. 1

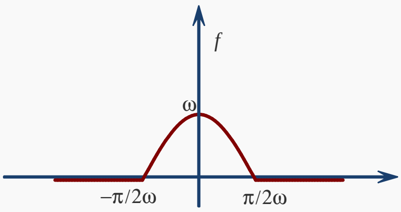
1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = \int\limits_{\frac{-\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}} \omega \cos \omega t dt = 2\omega \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2\omega}} \cos \omega t dt = 2\omega \left. \dfrac{\sin \omega t}{\omega} \right|_0^{\pi/2\omega} = 2$ $\boxed{3\ points}$

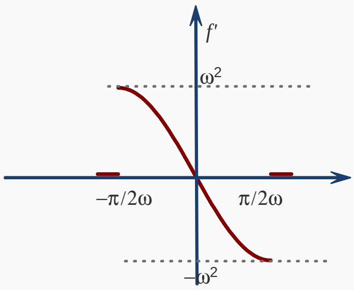
   La valeur de I est indépendante de ω, donc $\lim\limits_{\omega \to \infty} I = 2$ $\boxed{2\ points}$

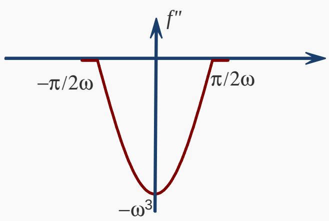
2. $f'(t) = \dfrac{d}{dt}(\omega \cos \omega t) = -\omega^2 \sin \omega t$ pour $|t| < \dfrac{\pi}{2\omega}$ $\boxed{2\ points}$

   $f''(t) = \dfrac{d}{dt}\left(-\omega^2 \sin \omega t\right) = -\omega^3 \cos \omega t = -\omega^2 f(t)$ $\boxed{3\ points}$

   Graphes







$\boxed{3\ points}$

3. La fonction $f(t)$ n'a pas des points de discontinuité donc $T' = [f']$

f' présente de discontinuité aux points $t = \pm\dfrac{\pi}{2\omega}$

$$\Delta f'\left(-\frac{\pi}{2\omega}\right) = f'\left(-\frac{\pi}{2\omega}^{+}\right) - f'\left(-\frac{\pi}{2\omega}^{-}\right) = \omega^2 - 0 = \omega^2$$

$$\Delta f'\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2\omega}^{+}\right) - f'\left(\frac{\pi}{2\omega}^{-}\right) = 0 - \omega^2 = -\omega^2$$

$$T'' = [f]'' = [f''] + \Delta f'\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)\delta\left(t - \frac{\pi}{2\omega}\right) + \Delta f'\left(-\frac{\pi}{2\omega}\right)\delta\left(t + \frac{\pi}{2\omega}\right)$$

$$\Longrightarrow T'' = -\omega^2 T + \omega^2\left[\delta\left(t + \frac{\pi}{2\omega}\right) + \delta\left(t - \frac{\pi}{2\omega}\right)\right] \quad \boxed{\textit{5 points}}$$

4. $\mathcal{F}(T'') = -\omega^2\mathcal{F}(T) + \omega^2\mathcal{F}\left[\delta\left(t + \frac{\pi}{2\omega}\right) + \delta\left(t - \frac{\pi}{2\omega}\right)\right]$

$$\Longrightarrow -4\pi^2\nu^2\mathcal{F}(T) = -\omega^2\mathcal{F}(T) + \omega^2\left[\exp\left(\frac{-j\pi^2\nu}{\omega}\right) + \exp\left(\frac{j\pi^2\nu}{\omega}\right)\right]$$

$$\Longrightarrow -4\pi^2\nu^2\mathcal{F}(T) = -\omega^2\mathcal{F}(T) + 2\omega^2\cos\left(\frac{\pi^2\nu}{\omega}\right) \quad \boxed{\textit{5 points}}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{F}(T) = \frac{2\omega^2\cos\left(\frac{\pi^2\nu}{\omega}\right)}{\omega^2 - 4\pi^2\nu^2} \quad \boxed{\textit{3 points}}$$

5. $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\mathcal{F}(T) = \lim\limits_{\omega\to+\infty}\dfrac{2\omega^2\cos\left(\frac{\pi^2\nu}{\omega}\right)}{\omega^2 - 4\pi^2\nu^2} = \lim\limits_{\omega\to+\infty}\dfrac{2\cos\left(\frac{\pi^2\nu}{\omega}\right)}{1 - 4\pi^2\nu^2/\omega^2} = 2 \quad \boxed{\textit{3 points}}$

$$\lim_{\omega\to+\infty}\mathcal{F}(T) = 2 = 2\mathcal{F}(\delta) \Longrightarrow \lim_{\omega\to+\infty} T = 2\delta \Longleftrightarrow f_\omega \underset{\omega\to\infty}{\overset{\mathcal{D}'}{\to}} 2\delta \quad \boxed{\textit{3 points}}$$

6. On a $C_n = \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{n}{a}\right)$ où $a = \dfrac{\pi}{\omega}$ est la période de $g(t)$ donc $\dfrac{n}{a} = \dfrac{n\omega}{\pi}$

$$C_n = \frac{\omega}{\pi}\frac{2\omega^2\cos\left(\frac{\pi^2}{\omega}\frac{n\omega}{\pi}\right)}{\omega^2 - 4\pi^2\left(\frac{n\omega}{\pi}\right)^2} = \frac{\omega}{\pi}\frac{2\omega^2\cos(n\pi)}{\omega^2 - 4n^2\omega^2} = 2\frac{\omega}{\pi}\frac{\cos(n\pi)}{1 - 4n^2} \quad \boxed{\textit{3 points}}$$

$$a_n = 2\,\mathrm{Re}\,C_n = 4\frac{\omega}{\pi}\frac{\cos(n\pi)}{1 - 4n^2}, \boxed{\textit{3 points}}\, a_0 = C_0 = 2\frac{\omega}{\pi}$$

$$S(t) = 2\frac{\omega}{\pi}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\pi)}{1 - 4n^2}\cos 2nt\right) \quad \boxed{\textit{2 points}}$$

Exercice 2 (15 points) On considère la fonction $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$, avec $\alpha > 0$.

1. Montrer que la transformée de Laplace de t^α est $\mathcal{L}(t^\alpha) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
2. Sachant que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.Déduire les transformées de Laplace des fonctions $f(t) = t\sqrt{t}$ et $g(t) = \dfrac{1}{t\sqrt{t}}$

SOLUTION. 2

1. Soit $x = \frac{t}{p}$ alors $t = xp$, $dt = pdx$,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty (xp)^{\alpha-1} e^{-px} pdx = \int_0^\infty p^\alpha x^{\alpha-1} e^{-px} dx = p^\alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-px} dx = p^\alpha \mathcal{L}\left(x^{\alpha-1}\right)$$

d'où : $\mathcal{L}(x^\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$ *5 points*

ou bien : soit $x = pt$ donc $dx = pdt$ et $t = \frac{x}{p}$

$$\mathcal{L}(t^\alpha) = \int_0^\infty t^\alpha e^{-pt} dt = \int_0^\infty \left(\frac{x}{p}\right)^\alpha e^{-x} \frac{dx}{p} = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$$

2. $f(t) = t^{3/2} \Longrightarrow F(p) = \frac{\Gamma(5/2)}{p^{5/2}} = \frac{3}{4} \frac{\sqrt{\pi}}{p^2 \sqrt{p}}$ *5 points*

on a $\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$ *5 points*

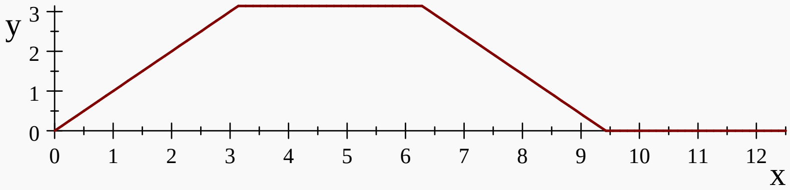
Exercice 3 (45 points) On désigne par $f(t)$ la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} t & si \quad 0 < t < \pi \\ \pi & si \quad \pi < t < 2\pi \\ 3\pi - t & si \quad 2\pi < t < 3\pi \\ 0 & si \quad ailleurs \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de $f(t)$.
2. Exprimer $f(t)$ en fonction de la fonction échelon unité.
3. Calculer au sens de distributions les dérivées $[f]'$ et $[f]''$.
4. Calculer la transformée de Fourier de $[f]''$ et en déduire la transformée de Fourier de $f(t)$.
5. Déduire la transformée de Laplace de $f(t)$,
6. Intégrer l'équation différentielle
$$y'' + \omega^2 y = f(t)$$
où ω est une constante donnée. et $y(0) = y'(0) = 0$
7. En utilisant la transfromation de Laplace Montrer que $\int_0^\infty \frac{e^{-t}\sin t}{t} dt = \frac{1}{4}\pi$

SOLUTION. 3

1. Graphe *3 points*



$$3\pi = 9.42478$$

2. $f(t) = t(u_0 - u_\pi) + \pi(u_\pi - u_{2\pi}) + (3\pi - t)(u_{2\pi} - u_{3\pi})$
$= tu_0 + \pi u_\pi - tu_\pi + 2\pi u_{2\pi} - tu_{2\pi} + tu_{3\pi} - 3\pi u_{3\pi}$
$= tu_0 - (t-\pi)u_\pi - (t-2\pi)u_{2\pi} + (t-3\pi)u_{3\pi}$ *5 points*

3. $[f] = t[u_0] - (t-\pi)[u_\pi] - (t-2\pi)[u_{2\pi}] + (t-3\pi)[u_{3\pi}]$
$[f]' = [u_0] + t\delta_0 - [u_\pi] - (t-\pi)\delta_\pi - [u_{2\pi}] - (t-2\pi)\delta_{2\pi} + [u_{3\pi}] + (t-3\pi)\delta_{3\pi}$
$= [u_0] - [u_\pi] - [u_{2\pi}] + [u_{3\pi}]$ *4 points*
$[f]'' = \delta_0 - \delta_\pi - \delta_{2\pi} + \delta_{3\pi}$ *3 points*

4. $\mathcal{F}([f]'') = \mathcal{F}(\delta_0 - \delta_\pi - \delta_{2\pi} + \delta_{3\pi})$
on a : $\mathcal{F}([f]'') = (2j\pi\nu)^2 F(\nu) = -4\pi^2\nu^2 F$ et $\mathcal{F}(\delta_a) = e^{-2j\pi a\nu}$
alors on obtient :
$-4\pi^2\nu^2 F_0 = 1 - e^{-2j\pi^2\nu} - e^{-4j\pi^2\nu} + e^{-6j\pi^2\nu}$
d'où
$$F(\nu) = -\frac{1 - e^{-2j\pi^2\nu} - e^{-4j\pi^2\nu} + e^{-6j\pi^2\nu}}{4\pi^2\nu^2}$$ *5 points*

5. On peut déduire $F(p)$ à partire de $F(\nu)$ en remplaçant $2j\pi\nu$ par p d'où :
$$F(p) = \frac{1 - e^{-\pi p} - e^{-2\pi p} + e^{-3\pi p}}{p^2}$$ *5 points*

6. Soit $Y = \mathcal{L}(Y)$ et $\mathcal{L}(y'') = p^2 Y - py(0) - y'(0) = p^2 Y$
L'équation image est $\mathcal{L}(y'' + \omega^2 y) = \mathcal{L}(f_0(t))$ donc
$p^2 Y + \omega^2 Y = F_0(p)$ soit
$$Y(p) = \frac{1 - e^{-\pi p} - e^{-2\pi p} + e^{-3\pi p}}{p^2(p^2 + \omega^2)}$$ *5 points*
Posons $H_\alpha(p) = \dfrac{e^{-\alpha p}}{p^2(p^2+\omega^2)} = \mathcal{L}(h_\alpha(t))$
$H_0(p) = \mathcal{L}(h_\alpha(t)) = \dfrac{1}{p^2(p^2+\omega^2)} = \dfrac{1}{\omega^2 p^2} - \dfrac{1}{\omega^2(p^2+\omega^2)}$ *5 points*
alors $h_0(t) = \dfrac{1}{\omega^2}\left(t - \dfrac{1}{\omega}\sin\omega t\right)u(t)$ *3 points*
On a $Y(p) = H_0 - H_\pi - H_{2\pi} + H_{3\pi} \Longrightarrow y(t) = h_0 - h_\pi - h_{2\pi} + h_{3\pi}$ *2 points*

7. $\mathcal{L}(\sin t) = \dfrac{1}{p^2+1}$
$\mathcal{L}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-pt} dt = \int_p^\infty \frac{dp}{p^2+1} = \arctan p\Big|_p^\infty = \frac{1}{2}\pi - \arctan p$
$\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}\sin t}{t} dt = \mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right)_{p=1} = \frac{1}{2}\pi - \arctan 1 = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{4}\pi$ *5 points*