Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Signal déterministe (MAA107)

Examen de rattrapage 2012-2013 **Durée : 3h.**

Solutions

Exercice 1 (15 points) Résoudre par Laplace l'équation différentielle

$$y'' + 5y' + 6y = e^x$$

avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = -2$

Solution 1 $y'' + 5y' + 6y = \exp(x)$

$$\left.\begin{array}{ll} \mathcal{L}(y) = Y & \mathcal{L}(y') = pY - y(0) = pY - 1 \\ \mathcal{L}(y'') = p^2Y - py(0) - y'(0) = p^2Y - p + 2 & \mathcal{L}(e^x) = \dfrac{1}{p-1} \end{array}\right\} \boxed{5 \text{ points}}$$

La transformée de Laplace de l'équation différentielle est :

$$p^2Y - p + 2 + 5(pY - 1) + 6Y = \frac{1}{p-1}$$

$$\Longrightarrow (p^2 + 5p + 6)\,Y = \frac{1}{p-1} + p + 3 = \frac{p^2 + 2p - 2}{p-1}$$

$$Y = \frac{p^2 + 2p - 2}{(p-1)(p^2 + 5p + 6)} = \frac{1}{12(p-1)} + \frac{2}{3(p+2)} + \frac{1}{4(p+3)} \boxed{5 \text{ points}}$$

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{12(p-1)} + \frac{2}{3(p+2)} + \frac{1}{4(p+3)}\right) \Longrightarrow$$

$$y(x) = \frac{1}{12}e^x + \frac{2}{3}e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-3x} \boxed{5 \text{ points}}$$

Exercice 2 (45 points) On considère la fonction $f(x)$ périodique de période $T = 4$ définie, sur $]-1, 3[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \pi & si \quad -1 < x < 1 \\ 0 & si \quad 1 < x < 3 \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de $f(x)$ sur $]-7, 7[$
2. Indiquer pour la fonction $f(x)$ les caractéristiques : Pulsation (ω) ,continuité, parité.
3. Calculer les coefficients réels de Fourier de $f(x)$
4. Ecrire la série de Fourier de $f(x)$
5. Quelle est l'amplitude A_n de l'harmonique de rang n
6. Calculer l'énergie du signal $f(x)$
7. Déduire les sommes

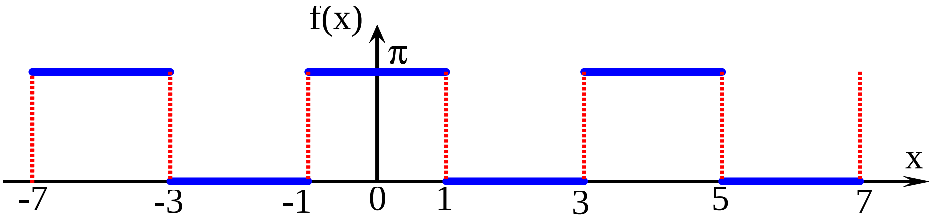
$$S_1 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}, S_2 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

8. Calculer la transformée de Fourier de $f(x)$ et de $g(x) = \exp(-|x|)$
9. Déduire les intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t dt}{t} \text{ et } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2+1}$$

Solution 2 : $T = 4$

1. Graphe $\boxed{\text{3 points}}$



2. $T = 4, \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $f(x)$ est continue sauf au points $t_k = 1 + 2k$; $k \in \mathbb{Z}$, $\boxed{\text{1 point}}$ $f(x)$ est paire. $\boxed{\text{1 point}}$

3. $a_0 = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \pi dx + \int_{1}^{3} 0.dx = \frac{1}{2}\pi$ $\boxed{\text{2 points}}$

$$a_n = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \pi \int_{0}^{1} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \left.\frac{2\pi \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n\pi}\right|_0^1 = \frac{2}{n}\sin\frac{1}{2}\pi n \quad \boxed{\text{3 points}}$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & si\ n = 2p \\ \dfrac{2(-1)^p}{2p+1} & si\ n = 2p+1 \end{cases} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

   $f(x)$ est paire donc $b_n = 0$ $\boxed{\text{2 points}}$

4. $S(x) = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \cos\left(\frac{(2p+1)\pi x}{2}\right)$ $\boxed{\text{2 points}}$

5. L'amplitude de l'harmonique $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |a_n|$

   $A_0 = \frac{\pi}{2}$, $A_{2p} = 0$ et $A_{2p+1} = \frac{2}{2p+1}$ $\boxed{\text{2 points}}$

6. $E = \int_{-1}^{1} \pi^2 dx = 2\pi^2$ $\boxed{\text{2 points}}$

7. La fonction $f(x)$ est continue au point $x = 0$ et $f(0) = \pi$ donc $\widehat{f}(0) = f(0)$ c'est-à-dire

$$\pi = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \Longrightarrow \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4} \quad \boxed{\text{5 points}}$$

   D'après la formule de parceval $E = Ta_0^2 + \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$

$$\Leftrightarrow 2\pi^2 = 4\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 2\sum_{p=0}^{\infty} \frac{4}{(2p+1)^2} \Longrightarrow \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{8}\pi^2 \quad \boxed{\text{5 points}}$$

8. $F(\nu) = \int_{-1}^{1} \pi \exp(-2j\pi\nu x)\, dx = \left.\frac{-\pi}{2j\pi\nu} \exp(-2j\pi\nu x)\right|_{-1}^{1}$

$$= \frac{1}{\nu}\left(\frac{e^{2j\pi\nu}-e^{-2j\pi\nu}}{2j}\right) = \frac{\sin 2\pi\nu}{\nu} \quad \boxed{\text{3 points}}$$

$$G(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|x|)\exp(-2j\pi\nu x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \exp(x)\exp(-2j\pi\nu x)\,dx + \int_{0}^{\infty} \exp(-x)\exp(-2j\pi\nu x)\,dx$$

$$= \frac{\exp(x)}{1-2j\pi\nu}\exp(-2j\pi\nu x)\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{\exp(-x)}{1+2j\pi\nu}\exp(-2j\pi\nu x)\Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{1-2j\pi\nu} + \frac{1}{2j\pi\nu+1} = \frac{2}{4\pi^2\nu^2+1} \quad \boxed{\text{5 points}}$$

9. $f(x) = \mathcal{F}^{-1}(F(\nu)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi\nu}{\nu}\exp(2j\pi\nu x)\,d\nu$

$$f(0) = \pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi\nu}{\nu}d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\frac{\sin 2\pi\nu}{2\pi\nu}d\nu \overset{t=2\pi\nu}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \pi \quad \boxed{\text{3 points}}$$

$$g(x) = \mathcal{F}^{-1}(G(\nu)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{4\pi^2\nu^2+1}\exp(2j\pi\nu x)\,d\nu$$

$$g(0) = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{4\pi^2\nu^2+1}d\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{4\pi^2\nu^2+1}d\nu \overset{t=2\pi\nu}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2+1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \pi \quad \boxed{\text{3 points}}$$

Exercice 3 (30 points) Soit

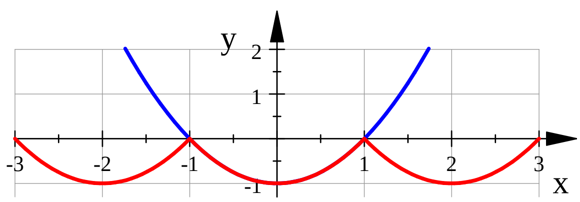
$$f(x) = x^2 - a^2$$

une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, et $g(x)$ la fonction périodiques qui coincide avec $f(x)$ sur $[-a, a]$

1. Tracer les graphes de $f(x)$ et $g(x)$ sur $[-3a, 3a]$
2. Calculer de deux façons différentes T'_f ,T''_f les dérivées de T_f
3. Calculer au sens de distributions les dérivées première et seconde de $g(x)$
4. Calculer la transformée de Fourier de $[g]''$ et en déduire celle de $g(x)$
5. Déduire la série de Fourier de $g(x)$

Solution 3 $f(x) = x^2 - a^2$

1. Graphes $\boxed{\text{3 points}}$



2. $1^{ère}$*méthode* On vérifie que $f(x) = x^2$ est localement sommable et que T_f est une forme linéaire continue et par suite T_f est une distribution régulière associée à $f(x)$

$$\left\langle T_f', \varphi \right\rangle = -\left\langle T_f, \varphi' \right\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi'(x)\, dx$$

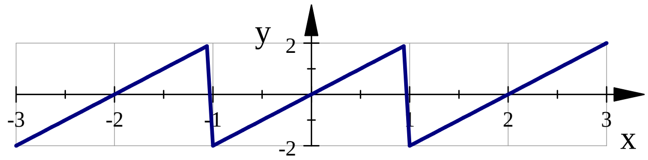
En intégrant par parties on trouve : $\left\langle T_f', \varphi \right\rangle = 2\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\, dx$ $\boxed{\text{2 points}}$

et $\left\langle T_f'', \varphi \right\rangle = -\left\langle T_f', \varphi' \right\rangle = -2\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi'(x)\, dx$

$= -\left(2x\varphi(x)\right)\big|_{-\infty}^{\infty} + 2\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = 2\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx$ $\boxed{\text{2 points}}$

$2^{ième}$*méthode* $T_f = [x^2]$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $T_f' = T_{f'} = [2x]$ $\boxed{\text{2 points}}$

et de même $T_f'' = T_{f'}' = T_{f''} = [2]$ $\boxed{\text{2 points}}$



Graphe de $g'(x)$ pour $a = 1$

3. $g(x)$ est continue sur $[-a, a]$ donc $[g]' = [g'] = [2x]\, g'(x)$ a, aux points $t_k = (2k+1)\, a\,;(k \in \mathbb{Z})$, des points de discontinuité de permière espèce. Le saut d'amplitude est $\Delta g(t_k) = g(t_k^+) - g(t_k^-) = -2a - (2a) = -4a$ $\boxed{\text{2 points}}$ $\quad g''(x) = 2$

$[g]'' = 2 - 4a \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(x - (2k+1)\, a)$ $\boxed{\text{2 points}}$

4. $\mathcal{F}([g]'') = \mathcal{F}\left(2 - 4a \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(x - (2k+1)\, a)\right) = 2\delta(\nu) - 4a \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp(-2j\pi(2k+1)\nu a)$

$\mathcal{F}([g]'') = (2j\pi\nu)^2 \mathcal{F}([g]) \Longrightarrow \mathcal{F}([g]) = \dfrac{-1}{4\pi^2\nu^2}\left[2\delta(\nu) - 4a \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp(-2j\pi(2k+1)\nu a)\right]$

$= \dfrac{-1}{4\pi^2\nu^2}\left[2\delta(\nu) - 4a \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp(-2j\pi\nu a)\exp(-4j\pi k\nu a)\right]$

$= -\dfrac{\delta(\nu)}{2\pi^2} Pf\left(\dfrac{1}{\nu^2}\right) + 4a \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \dfrac{\exp(-2j\pi\nu a)}{4\pi^2\nu^2} \exp(-4j\pi k\nu a)$ $\boxed{\text{5 points}}$

on a $4a\dfrac{\exp(-2j\pi\nu a)}{4\pi^2\nu^2} = F_0(\nu)$ alors

$c_n = \dfrac{1}{2a} F_0\left(\dfrac{k}{2a}\right) = \dfrac{4a}{2a} \dfrac{\exp\left(-2j\pi a\dfrac{k}{2a}\right)}{4\pi^2 \dfrac{k^2}{4a^2}} = \dfrac{2}{\pi^2}\dfrac{a^2}{k^2} e^{-j\pi k} = \dfrac{2a^2(-1)^k}{\pi^2 k^2}$ $\boxed{\text{5 points}}$

$\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{-a}^{a} (x^2 - a^2)\, dx = -\dfrac{2}{3}a^2 = c_0$

$a_n = 2\,\mathrm{Re}(C_n) = \dfrac{4a^2(-1)^k}{\pi^2 k^2}$

$$S(x) = -\frac{2}{3}a^2 + \frac{4a^2}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^k}{k^2}\cos\frac{k\pi}{a}x \ \boxed{\text{5 points}}$$