Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

Signal déterministe (MAA107)

*Examen de **rattrapage** 2013-2014 - Semestre I* *Durée : 2h*

Documents autorisés : Notes de Cours de N.ASSAAD

Solutions

Exercice 1 (45 points) Sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ on définit la fonction :

$$\varphi(x) = \begin{cases} -2x - \pi & \text{si} \quad x \in [-\pi, 0] \\ 2x - \pi & \text{si} \quad x \in [0, \pi] \end{cases}$$

et soit $f(x)$ la fonction $2\pi-$périodique qui coincide avec $\varphi(x)$ sur $[-\pi, \pi]$

Soit $\gamma(x) = \dfrac{d\varphi}{dx}$ et on désigne par $g(x)$ la dérivée de $f(x)$.

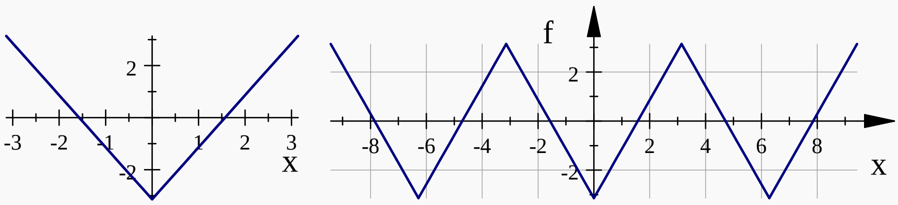
1. Tracer le graphe de $f(x)$ sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$ $(3pts)$
2. Tracer la courbe représentative de $g(x)$ sur $[-3\pi, 3\pi]$ $(4pts)$
3. Calculer la série réelle de Fourier associée à $f(x)$ $(15pts)$
4. Déduire la série de Fourier de $g(x)$. $(5pts)$
5. Calculer les sommes : $(8pts)$

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{et } S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)}$$

6. Calculer $\Gamma(\nu)$ la transformée de Fourier de $\gamma(x)$, déduire celle de $\varphi(x)$. $(10pts)$

Solution 1

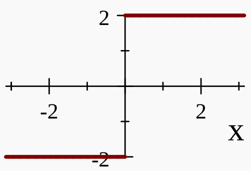
1. graphe de $f(x)$ $\boxed{\text{3 points}}$



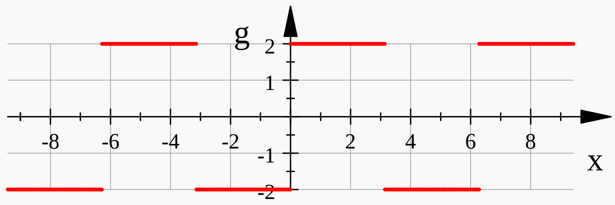
$\varphi(x)$ $\qquad$ $f(x)$

2. Graphe de $g(x)$: $\boxed{3 \text{ points}}$

$$\gamma(x) = \frac{d\varphi}{dx} = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x \in [-\pi, 0] \\ 2 & \text{si} \quad x \in [0, \pi] \end{cases} \quad \boxed{1 \text{ point}}$$



$\gamma(x)$



$g(x)$

3. La courbe $f(x)$ est symétrique par rapport à l'axe Oy donc $f(x)$ est paire, par suite $b_n = 0 \; \forall n \geq 1$ $\boxed{3 \text{ points}}$

$T = 2\pi \rightarrow \omega = 1$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} (-2x - \pi)\, dx + \int_{0}^{\pi} (2x - \pi)\, dx\right) = 0 \quad \boxed{3 \text{ points}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} (-2x - \pi) \cos nx dx + \int_{0}^{\pi} (2x - \pi) \cos nx dx\right) =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (2x - \pi) \cos nx dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \begin{cases} 0 & si \quad n = 2k \\ -\dfrac{8}{\pi(2k+1)^2} & si \quad n = 2k+1 \end{cases} \quad \boxed{6 \text{ points}}$$

d'où :

$$S_f(x) = -\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} \quad \boxed{3 \text{ points}}$$

4. $g(x)$ est la dérivée de $f(x)$, et elle vérifie les conditions de Dirichlet $\boxed{2 \text{ points}}$; donc :

$$S_g(x) = \frac{dS_f(x)}{dx} = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)} \quad \boxed{3 \text{ points}}$$

5. En tout point $x \in [-\pi, \pi]$,on a $f(x) = S_f(x)$

en particulier : $S_f(0) = f(0)$ $\boxed{1 \text{ point}}$

$$\Longleftrightarrow -\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = -\pi \Longrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \boxed{3 \text{ points}}$$

de même : $S_g\left(\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $\boxed{1 \text{ point}}$

c.à.d : $\displaystyle\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} = 2 \Longrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} = \frac{\pi}{4}$ $\boxed{3 \text{ points}}$

6. $\displaystyle\Gamma(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(x) e^{-2j\pi\nu x} dx = \int_{-\pi}^{0} (-2) e^{-2j\pi\nu x} dx + \int_{0}^{\pi} 2e^{-2j\pi\nu x} dx$

$$= -2\left.\frac{e^{-2j\pi\nu x}}{-2j\pi\nu}\right|_{-\pi}^{0} + 2\left.\frac{e^{-2j\pi\nu x}}{-2j\pi\nu}\right|_{0}^{\pi}$$
$$= \frac{1-e^{2j\pi^2\nu}}{j\pi\nu} - \frac{e^{-2j\pi^2\nu}-1}{j\pi\nu} = \frac{2-\left(e^{2j\pi^2\nu}+e^{-2j\pi^2\nu}\right)}{j\pi\nu}$$
$$= \frac{2-2\cos\pi^2\nu}{j\pi\nu} \quad \boxed{\text{5 points}}$$

Soit $\Phi(\nu)$ la transfromée de Fourier de $\varphi(x)$,et on a $\mathcal{F}[\varphi'] = 2j\pi\nu\mathcal{F}[\varphi]$ comme $\gamma(x) = \varphi'(x)$ alors $\Gamma(\nu) = 2j\pi\nu\,\Phi(\nu)$

d'où :

$$\Phi(\nu) = \frac{\Gamma(\nu)}{2j\pi\nu} = -\frac{2-2\cos\pi^2\nu}{2\pi^2\nu^2} = \frac{\cos\pi^2\nu - 1}{\pi^2\nu^2} \quad \boxed{\text{5 points}}$$

Exercice 2 (20 points) Soient les fonctions définies par les intégrales

$$f(t) = \int_0^t \frac{1-\cos x}{x}dx$$
$$g(t) = \int_0^t \frac{1-e^{-x}}{x}dx$$

Calculer la transformée de Laplace de $f(t)$ et de $g(t)$

Solution 2

1. $f(t) = \int_0^t \frac{1-\cos x}{x}dx$ existe car $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$ et $f(0) = 0$

   Soit $\pounds(1-\cos x) = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}$

   $\Longrightarrow \pounds\left(\frac{1-\cos x}{x}\right) = -\int\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}\right)dp = -\ln p + \frac{1}{2}\ln(p^2+1) + C$

   Soit $h(x) = \frac{1-\cos x}{x}$; et $H(p) = \pounds(h)$

   d'après le théorème de la valeur initiale $\lim\limits_{p\to+\infty} pH(p) = \lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0 \Longrightarrow$ $C = 0$ et

   $H(p) = -\ln p + \frac{1}{2}\ln(p^2+1) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p^2+1}{p^2}\right)$

   $f(t) = \int_0^t h(x)\,dx \Longrightarrow \pounds(f) = \frac{1}{p}\pounds(h)$

   donc :

$$F(p) = \frac{1}{2p}\ln\left(\frac{p^2+1}{p^2}\right)$$

2. $g(t)=\int\limits_0^t \frac{1-e^{-x}}{x}dx$ existe , en effet $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{x}=1.$ et $g(0)=0$

on a $g'(t)=\frac{1-e^{-t}}{t}\Longrightarrow t\frac{dg}{dt}=1-e^{-t}$

$\Longrightarrow -\frac{d}{dp}\pounds[g']=-\frac{d}{dp}[pG(p)-g(0)]=-\frac{d}{dp}[pG(p)]=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}$

$\Longrightarrow pG(p)=-\ln p+\ln(1+p)+C=\ln\left(\frac{1+p}{p}\right)+C,$

le théorème de la valeur initiale nous donne $\lim\limits_{p\to\infty}pG(p)=g(0)=0$ donc $C=0$ et alors

$$G(p)=\frac{1}{p}\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

Exercice 3 (35 points) Soit la suite de fonctions

$$f_n(t)=\begin{cases} an\cos ant & si\ |t|\leq\frac{\pi}{2an}\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

$n\in\mathbb{N}$ et a un réel

1. Calculer $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_n(t)\,dt$.
2. f_n est elle sommable.
3. Peut-on associer une distribution réguliére à f_n? Justifier votre réponse.
4. Calculer au sens des fonctions les dérivées première f_n' et seconde f_n'' de $f_n(t)$
5. Tracer les courbes de f_n, f_n' et f_n''
6. On désigne par T_n la distribution régulière associée à $f_n(t)$ .Calculer au sens des distributions les dérivées T_n' et T_n''
7. Sans faire de calcule, déterminer la transformée de Fourier de T_n''.
8. Déduire la transformée de f_n.
9. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{F}(T_n'')$ puis $\lim\limits_{n\to\infty}f_n$ dans $\mathcal{D}'$.

Solution 3

1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_n(t)\,dt=\int\limits_{\frac{-\pi}{2na}}^{\frac{\pi}{2na}}an\cos(ant)\,dt=an\left.\frac{\sin(ant)}{an}\right|_{-\pi/2an}^{\pi/2an}=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)=2$ $\boxed{\text{2 points}}$

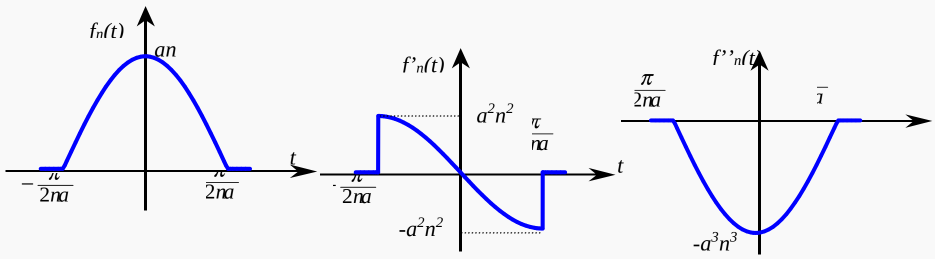
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_n(t)\,dt$ est finie et bien déterminée donc f_n est sommable $\boxed{\text{2 points}}$

3. Comme f_n est sommable sur $\mathbb{R}$ alors on peut associer une distribution réguliére à f_n : $T_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\varphi(t)\,dt$ $\boxed{\text{2 points}}$

4. $f_n'(t) = \dfrac{d}{dt}(an\cos ant) = -a^2n^2 \sin ant$ pour $|t| < \dfrac{\pi}{2an}$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $f_n''(t) = \dfrac{d}{dt}\left(-a^2n^2\sin ant\right) = -a^3n^3\cos ant = -a^2n^2 f_n(t)$ $\boxed{\text{2 points}}$

5. Graphes $\boxed{\text{3 points}}$



Graphes des fonctions f_n, f_n', f_n''

6. $f_n(t)$ est continue alors $T_n' = [f_n']$

   f_n' présente de discontinuité aux points $t = \pm\dfrac{\pi}{2an}$

   $f_n'\left(-\dfrac{\pi}{2na}^{+}\right) = a^2n^2$, $f_n'\left(-\dfrac{\pi}{2na}^{-}\right) = 0$

   $\Longrightarrow \Delta f_n'\left(-\dfrac{\pi}{2na}\right) = a^2n^2$

   $f_n'\left(\dfrac{\pi}{2na}^{-}\right) = -a^2n^2$, $f_n'\left(\dfrac{\pi}{2na}^{+}\right) = 0$

   $\Longrightarrow \Delta f_n'\left(\dfrac{\pi}{2na}\right) = a^2n^2$

   $T_n'' = [f_n]'' = [f_n''] + \Delta f_n'\left(\dfrac{\pi}{2na}\right)\delta\left(t - \dfrac{\pi}{2na}\right) + \Delta f_n'\left(-\dfrac{\pi}{2na}\right)\delta\left(t + \dfrac{\pi}{2na}\right)$

   $\Longrightarrow\ T_n'' = -a^2n^2T_n + a^2n^2\left[\delta\left(t + \dfrac{\pi}{2na}\right) + \delta\left(t - \dfrac{\pi}{2na}\right)\right]$ $\boxed{\text{5 points}}$

7. $\mathcal{F}(T_n'') = -a^2n^2\mathcal{F}(T_n) + a^2n^2\mathcal{F}\left[\delta\left(t + \dfrac{\pi}{2na}\right) + \delta\left(t - \dfrac{\pi}{2na}\right)\right]$ $\boxed{\text{3 points}}$

8. $\mathcal{F}(T_n'') = -4\pi^2\nu^2\mathcal{F}(T_n) = -a^2n^2\mathcal{F}(T_n) + a^2n^2\left[\exp\left(\dfrac{-j\pi^2\nu}{na}\right) + \exp\left(\dfrac{j\pi^2\nu}{na}\right)\right]$

   $\Longrightarrow -4\pi^2\nu^2\mathcal{F}(T_n) = -a^2n^2\mathcal{F}(T_n) + 2a^2n^2\cos\left(\dfrac{\pi^2\nu}{na}\right)$

   $\Longrightarrow \mathcal{F}(T_n) = \dfrac{2a^2n^2\cos\left(\dfrac{\pi^2\nu}{na}\right)}{a^2n^2 - 4\pi^2\nu^2}$ $\boxed{\text{5 points}}$

9. $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathcal{F}(T_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2a^2n^2\cos\left(\dfrac{\pi^2\nu}{na}\right)}{a^2n^2 - 4\pi^2\nu^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2a^2\cos\left(\dfrac{\pi^2\nu}{na}\right)}{a^2 - 4\pi^2\nu^2/n^2} = 2$ $\boxed{\text{5 points}}$

   $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathcal{F}(T_n) = 2 = 2\times 1 = 2\mathcal{F}(\delta) \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}T_n = 2\delta$

Enfin $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{D}'}{\longrightarrow}} 2\delta$ $\boxed{\text{5 points}}$