Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban
le cnam

Signal Déterministe - MAA107)

Examen de ***rattrapage*** *2014-2015-Semestre I*

Solutions

Exercice 1 (40 points) Sur l'intervalle $[0, \pi]$ on définit la fonction :

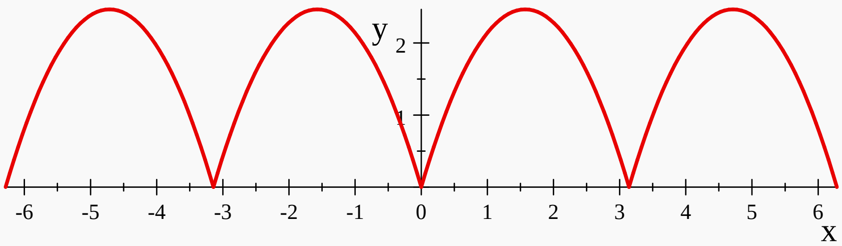
$$\varphi(x) = x(\pi - x)$$

et soit $f(x)$ la fonction $\pi-$périodique qui coïncide avec $\varphi(x)$ sur $[0, \pi]$
Soit $\gamma(x) = \dfrac{d\varphi}{dx}$ et on désigne par $g(x)$ la dérivée de $f(x)$.

1. Tracer le graphe de $f(x)$ sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$ $(5pts)$
2. Calculer la série réelle de Fourier associée à $f(x)$ $(15pts)$
3. Tracer la courbe représentative de $g(x)$ sur $[-\pi, 2\pi]$ $(5pts)$
4. Déduire la série de Fourier de $g(x)$. $(5pts)$
5. Calculer $\Gamma(\nu)$ la transformée de Fourier de $\gamma(x)$, déduire celle de $\varphi(x)$. $(10pts)$

Solution 1

1. Graphe : $\boxed{\text{5 points}}$



$f(x)$

2. $\varphi(x) = x(\pi - x) = \pi x - x^2$

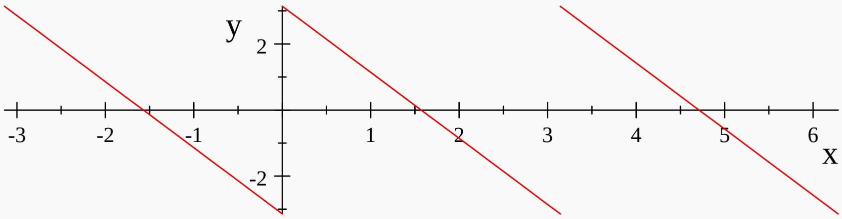
   $f(x)$ est paire donc $b_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $\boxed{\text{2 points}}$

   $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} (\pi x - x^2)\cos 2nx dx = -\dfrac{1}{n^2}$ En intégrant deux fois par parties $\boxed{\text{8 points}}$

   $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} (\pi x - x^2)\, dx = \dfrac{1}{6}\pi^2$ $\boxed{\text{3 points}}$

$$S_f(x) = \frac{1}{6}\pi^2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\cos 2nx \quad \boxed{\text{2 points}}$$

3. *Graphe* de $g(x)$



$\boxed{5 \text{ points}}$

4. $S_g(x) = \dfrac{dS_f}{dx} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}\sin 2nx$ $\boxed{5 \text{ points}}$

5. $\gamma(x) = \pi - 2x$ sur $]0, \pi[$ et nulle ailleurs

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{\pi} (\pi - 2x)\, e^{-2j\pi\nu x} dx$$

Par parties : $\begin{array}{ccc} u = \pi - 2x & \Longrightarrow & du = -2dx \\ dv = e^{-2j\pi\nu x}dx & \Longrightarrow & v = -\dfrac{1}{2j\pi\nu}e^{-2j\pi\nu x} \end{array}$

$$\Gamma(\nu) = -\frac{\pi - 2x}{2j\pi\nu}e^{-2j\pi\nu x}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{j\pi\nu}\int_0^{\pi} e^{-2j\pi\nu x}dx$$

$$= -\frac{-\pi e^{-2j\pi^2\nu} - \pi}{2j\pi\nu} + \frac{1}{2j^2\pi^2\nu^2}e^{-2j\pi\nu x}\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{e^{-2j\pi^2\nu} + 1}{2j\nu} + \frac{e^{-2j\pi^2\nu} - 1}{2j^2\pi^2\nu^2}$$

$$= \frac{e^{-2j\pi^2\nu} + 1}{2j\nu} - \frac{e^{-2j\pi^2\nu} - 1}{2\pi^2\nu^2} \quad \boxed{7 \text{ points}}$$

On a $\mathcal{F}(f') = (2j\pi\nu)\,\mathcal{F}(f)$

d'où $\Phi(\nu) = \dfrac{1}{2j\pi\nu}\Gamma(\nu) = -\dfrac{e^{-2j\pi^2\nu} + 1}{4\pi\nu^2} + j\dfrac{e^{-2j\pi^2\nu} - 1}{4\pi^3\nu^3}$ $\boxed{3 \text{ points}}$

Exercice 2 (25 points) En utilisant la transformation de Laplace, intégrer l'équation différentielle :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = f(x)$$

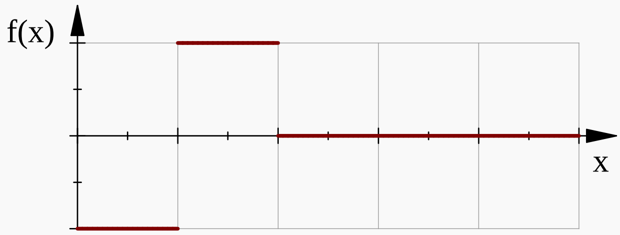
où $f(x)$ est la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} -a & si \quad 0 < x < a \\ +a & si \quad a < x < 2a \\ 0 & \quad ailleurs \end{cases}$$

sachant que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ et a une constante positive donnée.

Solution 2

On pose $u(x-a) = u_a = \begin{cases} 1 & si \quad x > a \\ 0 & si \quad x < a \end{cases}$



$f(x) = -a(u_0 - u_a) + a(u_a - u_{2a}) = -au_0 + 2au_a - au_{2a}$

où $u_a = u(x-a)$ telle que sa transformée de Laplace est $\dfrac{e^{-ap}}{p}$ donc :

$F(p) = a\dfrac{-1+2e^{-ap}-e^{-2ap}}{p}$ $\boxed{\text{5 points}}$

Soit $Y(p) = \mathcal{L}(y)$

alors $\mathcal{L}(y') = pY - y(0) = pY$ et $\mathcal{L}(y'') = p^2Y - y(0)p - y'(0) = p^2Y$

L'équation image est

$\mathcal{L}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + y\right) = \mathcal{L}(f(x))$

$\Longrightarrow p^2Y + 2py + Y = F(p)$

$Y(p^2+2p+1) = \dfrac{-1+2e^{-ap}-e^{-2ap}}{p}$

$Y = a\dfrac{-1+2e^{-ap}-e^{-2ap}}{p(p^2+2p+1)}$ $\boxed{\text{10 points}}$

Soit $H(p) = \dfrac{1}{p(p^2+2p+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{1+p} - \dfrac{1}{(1+p)^2} = \mathcal{L}(h(x))$

$\dfrac{1}{p} = \mathcal{L}(1)$, $\dfrac{1}{1+p} = \mathcal{L}(e^{-x})$ et $\dfrac{1}{(1+p)^2} = \mathcal{L}(xe^{-x})$

alors $h(x) = (1 - e^{-x} - xe^{-x})u(x)$

En fonction de $H(p)$: $Y(p) = a\left(-1+2e^{-ap}-e^{-2ap}\right)H(p)$ donc

$y(x) = -h(x) + 2h(x-a) - h(x-2a)$ $\boxed{\text{10 points}}$

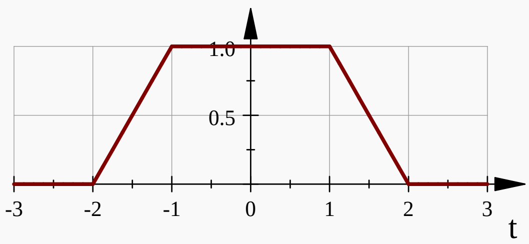
Exercice 3 (35 points) Soit la fonction :

$$f(t) = \begin{cases} 2+t & si \quad -2 \le t \le -1 \\ 1 & si \quad -1 \le t \le 1 \\ 2-t & si \quad 1 \le t \le 2 \\ 0 & si \quad |t| > 2 \end{cases}$$

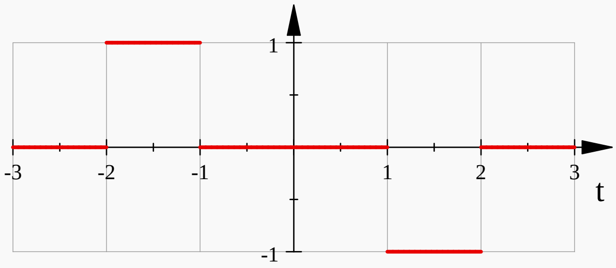
1. Calculer au sens des fonctions les dérivées f' et f''
2. Tracer les graphes de $f(t)$ et de sa fonction dérivées $f'(t)$
3. Exprimer $f(t)$ en fonction de l'échelon unité $u(t-a)$
4. Calculer de deux manières différentes les dérivées première et seconde au sens des distributions

Solution 3

1. $\begin{cases} 2+t & si \quad -2 \le t \le -1 \\ 1 & si \quad -1 \le t \le 1 \\ 2-t & si \quad 1 \le t \le 2 \\ 0 & si \quad |t| > 2 \end{cases} \Longrightarrow f'(t) = \begin{cases} 1 & si \quad -2 < t < -1 \\ 0 & si \quad -1 < t < 1 \\ -1 & si \quad 1 < t < 2 \\ 0 & si \quad |t| > 2 \end{cases} \Longrightarrow f''(t) = 0$ $\boxed{\text{5points}}$
2. graphes : $\boxed{\text{5points}}$



$f\,(t)$



$f'\,(t)$

3. $u\,(t-a) = 1$si $t > a$ et nulle ailleurs alors :

$$\begin{aligned} f\,(t) &= (2+t)\,(u\,(t+2) - u\,(t+1)) + (u\,(t+1) - u\,(t-1)) + (2-t)\,(u\,(t-1) - u\,(t-2)) \\ &= (2+t)\,u_{-2} + (-1-t)\,u_{-1} + (1-t)\,u_1 + (t-2)\,u_2 \quad \boxed{\text{5points}} \end{aligned}$$

4. $[f]'$

(a) $$\begin{aligned} [f]' &= u_{-2} + (2+t)\,\delta_{-2} - (1+t)\,\delta_{-1} - u_{-1} + (1-t)\,\delta_1 - u_1 + (t-2)\,\delta_2 + u_2 \\ &= u\,(t+2) - u\,(t+1) - u\,(t-1) + u\,(t-2) \end{aligned}$$

$$f''\,(t) = \delta\,(t+2) - \delta\,(t+1) - \delta\,(t-1) + \delta\,(t-2) \quad \boxed{\text{10points}}$$

(b) $f\,(t)$ est continue alors

Les points de discontinuité de f' sont $t = -2, -1, +1, +2$

- $\Delta f'\,(-2) = f'\,(-2^+) - f'\,(-2^-) = 1 - 0 = 1$
- $\Delta f'\,(-1) = f'\,(-1^+) - f'\,(-1^-) = 0 - 1 = -1$
- $\Delta f'\,(+1) = f'\,(+1^+) - f'\,(+1^-) = -1 - 0 = -1$
- $\Delta f'\,(2) = f'\,(2^+) - f'\,(2^-) = 0 - (-1) = 1$

$$f''\,(t) = \delta\,(t+2) - \delta\,(t+1) - \delta\,(t-1) + \delta\,(t-2) \quad \boxed{\text{10points}}$$