le cnam Liban

Institut Supérieur de Sciences Appliquées et Économiques
Centre du Liban associé au
Conservatoire National des Arts et Métiers

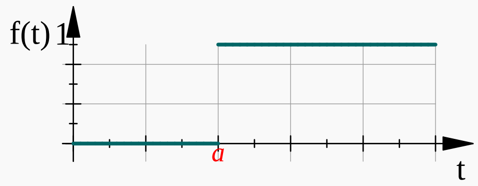
Transformation de Laplace
Exercices

Exercice 1 Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes

1. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t \in [0, a[\\ 1 & \text{pour} \quad t \in]a, \infty[\end{cases}$
2. $g(t) = \begin{cases} t & \text{pour} \quad t \in [0, 3[\\ 0 & \text{pour} \quad t \in]3, \infty[\end{cases}$
3. $h(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad t \in [0, 1[\\ 2 & \text{pour} \quad t \in]1, \infty[\end{cases}$
4. $k(t) = \begin{cases} -1 & \text{pour} \quad t \in [0, 1[\\ 1 & \text{pour} \quad t \in]1, \infty[\end{cases}$
5. $f_1(t) = \cos 2t + \sin 2t - e^{-2t} \sin 4t$
6. $f_2(t) = \left(t + t^2\right) \cos 3t$
7. $f_3(t) = e^t * \sin 2t$
8. $f_4(t) = t^{10} e^{-10t}$

Solution 1

1. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t \in [0, a[\\ 1 & \text{pour} \quad t \in]a, \infty[\end{cases}$



$f(t)$

(a) Par calcul intégral :

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = \int_a^\infty e^{-pt} dt = \left. \frac{e^{-pt}}{-p} \right|_a^\infty = -\frac{1}{p} \left(\lim_{X \to +\infty} e^{-pX} - e^{-ap} \right)$$

pour $\alpha = \mathrm{Re}(p) > 0$:

$$\lim_{X \to \infty} e^{-pX} = \lim_{X \to +\infty} e^{-\alpha X} e^{-j\beta X} = \lim_{X \to +\infty} \left(e^{-\alpha X} (\cos \beta X) - j \sin \beta X \right) = 0$$

$$\Longrightarrow F(p) = \frac{1}{p} e^{-ap}$$

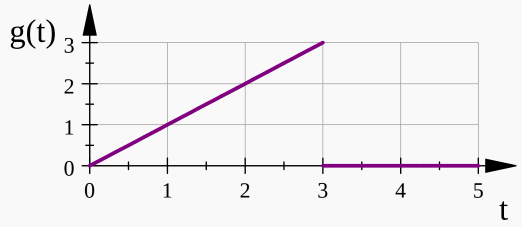
(b) A l'aide de fonction échelon unité :

$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t < 0 \\ 1 & \text{pour} \quad t > 0 \end{cases}$ tel que $\mathcal{L}(u) = \dfrac{1}{p}$

on a $f(t) = u(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t < a \\ 1 & \text{pour} \quad t > a \end{cases}$

On applique le théorème de translation $\Longrightarrow F(p) = \dfrac{1}{p} e^{-ap}$

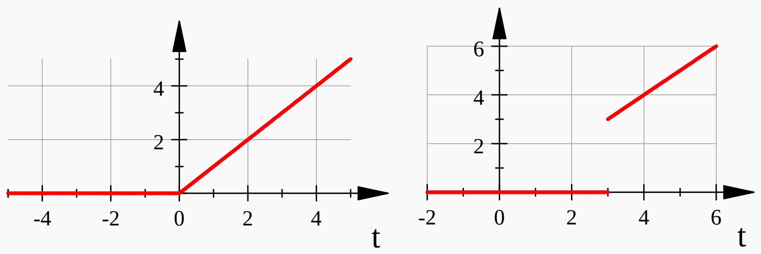
2. $g(t) = \begin{cases} t & \text{pour} \quad t \in [0, 3[\\ 0 & \text{pour} \quad t \in]3, \infty[\end{cases}$



(a) Par calcul intégral :

$$G(p) = \int_0^\infty g(t)e^{-pt}dt = \int_0^3 te^{-pt}dt = -\frac{3}{p}e^{-3p} - \int_0^3 \left(-\tfrac{1}{p}e^{-pt}\right) dt$$
$$= -\frac{3}{p}e^{-3p} - \frac{e^{-3p}-1}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{3p+1}{p^2}e^{-3p}$$

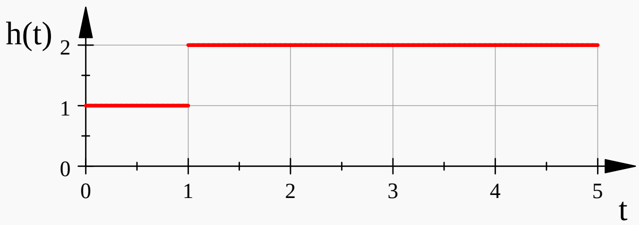
(b) A l'aide de fonction échelon unité :
La fonction causale $f(t) = t$ s'exprime : $f(t) = tu(t)$ sa transformée de Laplace est $F(P) = \dfrac{1}{p^2}$
la partie pour $t > 3$ est $tu(t-3)$ alors $g(t) = t(u(t) - u(t-3))$



$tu(t)$ $tu(t-3)$

$$G(p) = -\frac{d}{dp}\left(\mathcal{L}(u(t)) - \mathcal{L}(u(t-3))\right) = -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p} - \frac{e^{-3p}}{p}\right)$$
$$= -\frac{1}{p^2}\left(e^{-3p} + 3pe^{-3p} - 1\right) = \frac{1}{p^2} - \frac{3p+1}{p^2}e^{-3p}$$

3. $h(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad t \in [0,1[\\ 2 & \text{pour} \quad t \in]1,\infty[\end{cases}$



(a) Par calcul intégral :

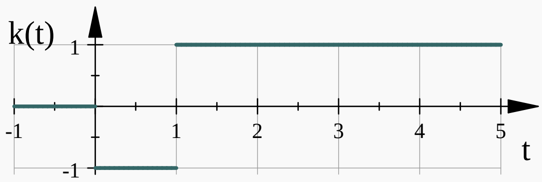
$$H(p) = \int_0^\infty h(t)e^{-pt}dt = \int_0^1 1.e^{-pt}dt + \int_1^\infty 2.e^{-pt}dt$$
$$= \left.\frac{e^{-pt}}{-p}\right|_0^1 + 2\left.\frac{e^{-pt}}{-p}\right|_1^\infty$$
$$= -\frac{1}{p}\left(e^{-p} - 1\right) - \frac{2}{p}\left(0 - e^{-p}\right) = \frac{e^{-p}+1}{p}$$

(b) A l'aide de fonction échelon unité :

$h(t) = (u(t) - u(t-1)) + 2u(t-1) = u(t) + u(t-1)$

$\Longrightarrow H(p) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{e^{-p}}{p}$

4. $k(t) = \begin{cases} -1 & \text{pour} \quad t \in [0,1[\\ 1 & \text{pour} \quad t \in]1,\infty[\end{cases}$



(a) Par calcul intégral :

$$K(p) = \int_0^\infty k(t)e^{-pt}dt = \int_0^1 -1.e^{-pt}dt + \int_1^\infty 1.e^{-pt}dt$$

$$= -\left.\frac{e^{-pt}}{-p}\right|_0^1 + \left.\frac{e^{-pt}}{-p}\right|_1^\infty$$

$$= \frac{1}{p}\left(e^{-p} - 1\right) - \frac{1}{p}\left(0 - e^{-p}\right) = \frac{-1 + 2e^{-p}}{p}$$

(b) A l'aide de fonction échelon unité :

Le segment $k(t) = -1$ pour $0 < t < 1$ s'écrit : $(-1)(u(t) - u(t-1)) = -u(t) + u(t-1)$

donc $k(t) = -u(t) + 2u(t-1) \Longrightarrow K(p) = \dfrac{-1 + 2e^{-p}}{p}$

5. $f_1(t) = \cos 2t + \sin 2t - e^{-2t}\sin 4t$

$F_1(p) = \mathcal{L}(\cos 2t) + \mathcal{L}(\sin 2t) - \mathcal{L}\left(e^{-2t}\sin 4t\right)$

$$= \frac{p}{p^2+4} + \frac{2}{p^2+4} + \frac{4}{(p+2)^2+16}$$

$$= \frac{p^3 + 10p^2 + 28p + 56}{p^4 + 4p^3 + 24p^2 + 16p + 80}$$

6. $f_2(t) = \left(t + t^2\right)\cos 3t$

$\mathcal{L}(\cos 3t) = \dfrac{p}{p^2+9}$

$$\mathcal{L}(t\cos 3t) = -\frac{d}{dp}\mathcal{L}(\cos 3t) = -\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+9}\right) = \frac{p^2-9}{\left(p^2+9\right)^2}$$

$$\mathcal{L}(t\cos 3t) = (-1)^2\frac{d^2}{dp^2}\mathcal{L}(\cos 3t) = -\frac{d}{dp}\left(\frac{p^2-9}{\left(p^2+9\right)^2}\right) = \frac{2p\left(p^2-27\right)}{\left(p^2+9\right)^3}$$

$$F_2(p) = \frac{p^2-9}{\left(p^2+9\right)^2} + \frac{2p\left(p^2-27\right)}{\left(p^2+9\right)^3} = \frac{p^4 + 2p^3 - 54p - 81}{\left(p^2+9\right)^3}$$

7. $f_3(t) = e^t * \sin 2t$

$$F_3(p) = \mathcal{L}\left(e^t\right) \times \mathcal{L}(\sin 2t) = \frac{1}{p-1} \times \frac{2}{p^2+4} = \frac{2}{\left(p^2+4\right)(p-1)}$$

$$= \frac{2}{p^3 - p^2 + 4p - 4}$$

8. $f_4(t) = t^{10}e^{-10t}$

On peut calculer La T.L de $f_4(t)$ par deux méthodes :

- A l'aide de théorème de modulation : $\mathcal{L}\left(f(t)\,e^{\alpha t}\right) = F(p-\alpha)$

$$\mathcal{L}\left(t^{10}\right) = \frac{10!}{p^{11}} = \frac{3628\,800}{p^{11}} \Longrightarrow F_4(p) = \frac{10!}{(p+10)^{11}}$$

- A l'aide de dérivée de la transformée : $\mathcal{L}\left[t^n f\right](p) = (-1)^n \dfrac{d^n F}{dp^n}$

$$\mathcal{L}\left(e^{-10t}\right) = \frac{1}{p+10} \Longrightarrow \mathcal{L}\left(t^{10}e^{-10t}\right) = (-1)^{10}\frac{d^{10}}{dp^{10}}\left(\frac{1}{p+10}\right) = \frac{10!}{(p+10)^{11}}$$

Exercice 2 Montrer que :

1. Si $f(t) = \dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t} \Longrightarrow \mathcal{L}[f](p) = \ln\left(\dfrac{p+b}{p+a}\right)$

   En déduire que : $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}dt = \ln 2$

2. Si $f(t) = \dfrac{\cos at - \cos bt}{t} \Longrightarrow \mathcal{L}[f](p) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{p^2+b^2}{p^2+a^2}\right)$

   En déduire que : $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos 6t - \cos 4t}{t}dt = \ln\frac{2}{3}$

Solution 2

1. On utilise le théorème de primitive de transformée : $\mathcal{L}\left[\frac{1}{t}f(t)\right] = -\int F(p)\,dp$

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{t}\right] = -\ln p \Longrightarrow \mathcal{L}\left[\frac{e^{-at}}{t}\right] = -\ln(p+a)$$

de même $\mathcal{L}\left[\dfrac{e^{-bt}}{t}\right] = -\ln(p+b)$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}\left[\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\right] = -\ln(p+a) + \ln(p+b) = \ln\frac{p+b}{p+a}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}\right] = \int_0^\infty \frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}e^{-pt}dt = \ln\frac{p+6}{p+3} = F(p)$$

$$F(0) = \int_0^\infty \frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}dt = \ln\frac{0+6}{0+3} = \ln 2$$

Ou bien on utilise la primitive de la transformée.

$$\mathcal{L}\left(e^{-at}\right) = \frac{1}{p+a} \Longrightarrow \mathcal{L}\left(\frac{e^{-at}}{t}\right) = -\int \frac{dp}{p+a} = -\ln(a+p)$$

de même $\mathcal{L}\left[\dfrac{e^{-bt}}{t}\right] = -\ln(p+b)$

2. $\dfrac{\cos at}{t} = \dfrac{e^{jat}+e^{-jat}}{2t}$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\cos at}{t}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{jat}+e^{-jat}}{2t}\right] = -\frac{1}{2}\left[\ln(p-ja) + \ln(p+ja)\right]$$
$$= -\frac{1}{2}\ln(p-ja)(p+ja) = -\frac{1}{2}\ln\left(p^2+a^2\right)$$

$$\text{et } \mathcal{L}\left[\frac{\cos bt}{t}\right] = -\frac{1}{2}\ln\left(p^2+b^2\right)$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}\left[\frac{\cos at-\cos bt}{t}\right] = -\frac{1}{2}\ln\left(p^2+a^2\right)+\frac{1}{2}\ln\left(p^2+b^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{p^2+b^2}{p^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\cos 6t-\cos 4t}{t}\right] = \int_0^\infty \frac{\cos 6t-\cos 4t}{t}e^{-pt}dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{p^2+16}{p^2+36} = F(p)$$

$$F(0) = \int_0^\infty \frac{\cos 6t-\cos 4t}{t}dt = \frac{1}{2}\ln\frac{0+16}{0+36} = \ln\frac{4}{6} = \ln\frac{2}{3}$$

Exercice 3 Calculer les transformées de Laplace des fonctions périodiques suivantes :

1. $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad t\in\,]0,1[\\ -1 & \text{pour} \quad t\in\,]1,2[\end{cases}$

2. $f(t) = t$ pour $t\in\,]0,1[$

3. $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad t\in\left]0,\frac{T}{2}\right[\\ 0 & \text{pour} \quad t\in\left]\frac{T}{2},T\right[\end{cases}$

4. $f(t) = e^{-t}$ pour $t\in\,]0,1[$

Solution 3

1. $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad t\in\,]0,1[\\ -1 & \text{pour} \quad t\in\,]1,2[\end{cases}$; $T=2$

$$F(p) = \frac{\int_0^T f(t)e^{-pt}dt}{1-e^{-pT}} = \frac{1}{1-e^{-2p}}\left(\int_0^1 e^{-pt}dt - \int_1^2 e^{-pt}dt\right) - \frac{e^{-p}-1}{p\left(e^{-p}+1\right)}$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2p}}\left[\frac{-1}{p}e^{-pt}\Big|_0^1 + \frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_1^2\right] = \frac{1}{p\left(1-e^{-2p}\right)}\left(1-e^{-p}+e^{-2p}-e^{-p}\right)$$

$$= \frac{\left(1-e^{-p}\right)^2}{p\left(1-e^{-2p}\right)} = \frac{1-e^{-p}}{p\left(1+e^{-p}\right)}$$

2. $f(t) = t$ pour $t\in\,]0,1[\,, T=1$

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-p}}\left(\int_0^1 te^{-pt}dt\right) = \frac{1}{1-e^{-p}}\left(-\frac{1}{p}e^{-p} - \int_0^1\left(-\tfrac{1}{p}e^{-pt}\right)dt\right)$$

$$= \frac{1}{1-e^{-p}}\left(-\frac{1}{p}e^{-p} - \frac{e^{-p}-1}{p^2}\right) = \frac{e^{-p}(p+1)-1}{\left(e^{-p}-1\right)p^2}$$

3. $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad t\in\left]0,\frac{T}{2}\right[\\ 0 & \text{pour} \quad t\in\left]\frac{T}{2},T\right[\end{cases}$

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}}\left(\int_0^{T/2} e^{-pt}dt\right)$$

$$= -\frac{1}{1-e^{-pT}}\frac{e^{-\frac{1}{2}pT}-1}{p} = \frac{1}{p\left(e^{-\frac{1}{2}pT}+1\right)}$$

4. $f(t) = e^{-t}$ pour $t \in]0,1[$; $T = 1$

$$F(p) = \mathcal{L}[f](p) = \frac{1}{1-e^{-p}}\left(\int_0^1 e^{-t}e^{-pt}dt\right)$$

$$= \frac{1}{1-e^{-p}}\left(\int_0^1 e^{-(p+1)t}dt\right)$$

$$= -\frac{1}{1-e^{-p}}\frac{e^{-p-1}-1}{p+1} = \frac{e^{-p-1}-1}{(-1+e^{-p})(p+1)}$$

Exercice 4 Déterminer la fonction temporelle $f(t)$ dont la transformée de Laplace est $F(p)$ dans les cas suivants :

1. $F(p) = \dfrac{1}{(p+5)^4}$
2. $F(p) = \dfrac{e^{-2p}+e^{-p}}{p^3}$
3. $F(p) = \dfrac{p+2}{p^2+4p+5}$
4. $F(p) = \dfrac{5}{p^2+6p+34}$
5. $F(p) = \dfrac{p-1}{p^2-2p+5}$
6. $F(p) = \dfrac{p}{p^2+4p+13}$
7. $F(p) = \dfrac{2p+1}{p^4+4p^2}$
8. $F(p) = \dfrac{\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
9. $F(p) = \dfrac{2}{p^5-2p^4-3p^3}$
10. $F(p) = \dfrac{(p+2)e^{-5p}}{p^2+4p+5}$
11. $F(p) = \dfrac{(e^{-2p}+3e^{2p})(2p+1)}{p^2(p^2+4)}$

Solution 4

1. $\mathcal{L}(t^n) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$ et $\mathcal{L}(t^n e^{at}) = \dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}} \Longrightarrow \mathcal{L}(t^3e^{-5t}) = \dfrac{3!}{(p+5)^4}$

$$\Longrightarrow \frac{1}{(p+5)^4} = \mathcal{L}\left(\frac{1}{6}t^3e^{-5t}\right)$$

2. $\dfrac{e^{-2p}+e^{-p}}{p^3} = \dfrac{e^{-2p}}{p^3} + \dfrac{e^{-p}}{p^3}$

$$\frac{1}{p^3} = \frac{1}{2!}\mathcal{L}[t^2] \Longrightarrow \frac{e^{-2p}}{p^3} = \frac{1}{2!}\mathcal{L}\left[(t-2)^2u(t-2)\right] \text{ et } \frac{e^{-p}}{p^3} = \frac{1}{2!}\mathcal{L}\left[(t-1)^2u(t-1)\right]$$

$$\Longrightarrow \frac{e^{-2p}+e^{-p}}{p^3} = \frac{1}{2!}\mathcal{L}\left[(t-2)^2u(t-2)+(t-1)^2u(t-1)\right]$$

3. $\dfrac{p+2}{p^2+4p+5} = \dfrac{p+2}{(p+2)^2+1}$

$$\mathcal{L}\left[\cos(t)\right] = \frac{p}{p^2+1} \text{ et } \mathcal{L}\left[e^{-at}\cos(t)\right] = \frac{p+a}{(p+a)^2+1}$$

$$\Longrightarrow \frac{p+2}{(p+2)^2+1} = \mathcal{L}\left[e^{-2t}\cos(t)\right]$$

4. $$\frac{5}{p^2+6p+34} = \frac{5}{p^2+6p+9+25} = \frac{5}{(p+3)^2+5^2} = \mathcal{L}\left[e^{-3t}\sin(5t)\right]$$

5. $$\frac{p-1}{p^2-2p+5} = \frac{p-1}{p^2-2p+1+4} = \frac{p-1}{(p-1)^2+2^2} = \mathcal{L}\left[e^{t}\cos(2t)\right]$$

6. $$\frac{p}{p^2+4p+13} = \frac{p}{(p+2)^2+9} = \frac{p+2-2}{(p+2)^2+9}$$
$$= \frac{p+2}{(p+2)^2+9} - \frac{2}{(p+2)^2+9} = \frac{p+2}{(p+2)^2+9} - \frac{2}{3}\frac{3}{(p+2)^2+9}$$
$$= \mathcal{L}\left[e^{-2t}\cos(3t)\right] - \frac{2}{3}\mathcal{L}\left[e^{-2t}\sin(3t)\right] = \mathcal{L}\left[e^{-2t}\left(\cos 3t - \frac{2}{3}\sin 3t\right)\right]$$

7. $$\frac{2p+1}{p^4+4p^2} = \frac{1}{4p^2} + \frac{1}{2p} - \frac{1}{4}\frac{2p+1}{p^2+4}$$
$$= \frac{1}{4p^2} + \frac{1}{2p} - \frac{p}{2\left(p^2+4\right)} - \frac{1}{4\left(p^2+4\right)}$$
$$\Longrightarrow f(t) = \left(\frac{t}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{8}\sin 2t\right) u\left(t\right)$$

8. $$F(p) = \frac{\omega p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2} = \frac{1}{2}\frac{2p\omega}{\left(p^2+\omega^2\right)^2} = \frac{1}{2}\left[-\frac{d}{dp}\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)\right]$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{d}{dp}\mathcal{L}\left[\sin\omega t\right] = -\frac{1}{2}\mathcal{L}\left[t\sin\omega t\right]$$

9. $$\frac{2}{p^5-2p^4-3p^3} = \frac{2}{p^3\left(p^2-2p-3\right)} = \frac{2}{p^3\left(p+1\right)\left(p-3\right)}$$
$$= -\frac{14}{27p} + \frac{4}{9p^2} - \frac{2}{3p^3} + \frac{1}{2\left(p+1\right)} + \frac{1}{54\left(p-3\right)}$$
$$= \mathcal{L}\left(-\frac{14}{27} + \frac{4}{9}t - \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{54}e^{3t}\right)$$

10. $$F(p) = \frac{\left(p+2\right)e^{-5p}}{p^2+4p+5}$$
$$\frac{p+2}{p^2+4p+5} = \frac{p+2}{\left(p+2\right)^2+1} = \mathcal{L}\left(e^{-2t}\cos t\right)$$
$$\frac{\left(p+2\right)e^{-5p}}{p^2+4p+5} = \mathcal{L}\left(e^{-2(t+5)}\cos\left(t+5\right)\right)$$

11. $$F(p) = \frac{\left(e^{-2p}+3e^{2p}\right)\left(2p+1\right)}{p^2\left(p^2+4\right)} = \mathcal{L}\left(f\left(t\right)\right)$$
$$F_0 = \mathcal{L}\left(f_0\left(t\right)\right) = \frac{\left(2p+1\right)}{p^2\left(p^2+4\right)} = \frac{1}{2p} + \frac{1}{4p^2} - \frac{1}{2}\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{4}\frac{1}{p^2+4}$$
$$= \frac{1}{2p} + \frac{1}{4p^2} - \frac{1}{2}\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{8}\frac{2}{p^2+4}$$
$$\Longrightarrow f_0\left(t\right) = \frac{1}{2} + \frac{t}{4} - \frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{8}\sin 2t$$
$$F = F_0e^{-2p} + 3F_0e^{2p}$$
$$f\left(t\right) = f_0\left(t-2\right) + 3f_0\left(t+2\right)$$

Exercice 5 Résoudre les équations suivantes :

1. $y'' - 2y + 1 = \exp(t);\ y(0) = y'(0) = 0$
2. $y'' + 1 = t\ ;\ y(0) = y\prime(0) = 0$
3. $(t-1)y'' + (5-4t)y\prime - 4y = 0\,; y(0) = 3,\ y'(0) = 12.$
4. Le système : $\begin{matrix} y' - y - 3x & = & t \\ x' - y + x & = & 0 \end{matrix}\ ; x(0) = y(0) = 0$
5. $tf'(t) + 2\int_0^t f(u)\sin(t-u)du = \sin t, t > 0$ et $f(0) = 1$
6. $y'' + 4y' + 3y = 0$ avec les conditions $y(0) = 3$ et $y'(0) = 1$.
7. $y'' - 2y' + y = \exp(t);\ y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$
8. $y'' + 3y' + 2y = \delta(t-a)$ avec les conditions $y(0) = y'(0) = 0$. $\delta(t)$ est la l'impulsion de Dirac : $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$
9. $y'''(t) - 6y''(t) + 11y'(t) - 6y(t) = e^{-t}$ avec $y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0 \qquad y''(0) = -4$

Solution 5

1. $y'' - 2y + 1 = \exp(t);\ y(0) = y'(0) = 0$
   Soit $Y = Y(p) = \mathcal{L}[y]$
   L'équation auxiliaire est :
   $\mathcal{L}[y'' - 2y + 1] = \mathcal{L}[\exp(t)]$
   $\Longrightarrow \mathcal{L}[y''] - 2\mathcal{L}[y] + \mathcal{L}[1] = \mathcal{L}[\exp(t)]$
   $\Longrightarrow p^2Y - 2Y + \frac{1}{p} = \frac{1}{p-1}$
   $$\Longrightarrow Y = \frac{1}{(p-1)(p^2-2)} - \frac{1}{p(p^2-2)} = \frac{1}{(p-1)(p^2-2)p}$$
   $$= \frac{1}{p(p-1)\left(p-\sqrt{2}\right)\left(p+\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}+1}{p-\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}-1}{p+\sqrt{2}}$$
   $$\Longrightarrow y(t) = \frac{1}{2} - e^t + \frac{1+\sqrt{2}}{4}e^{\sqrt{2}t} + \frac{1-\sqrt{2}}{4}e^{-\sqrt{2}t}$$
   $$= \frac{1}{2} - e^t + \frac{e^{\sqrt{2}t} + e^{-\sqrt{2}t}}{4} + \sqrt{2}\frac{e^{\sqrt{2}t} - e^{-\sqrt{2}t}}{4}$$
   $$= \left(\frac{1}{2} - e^t + \frac{1}{2}\cosh\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}\sinh\sqrt{2}t\right)u(t)$$
2. $y'' + 1 = t\ ;\ y(0) = y'(0) = 0$
   $$\mathcal{L}[y'' + 1] = \mathcal{L}[t] \Longrightarrow p^2Y + \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2}$$
   $$\Longrightarrow Y = \frac{1}{p^4} - \frac{1}{p^3} = \mathcal{L}\left[\frac{t^3}{3!} - \frac{t^2}{2!}\right]$$
   $$\Longrightarrow y(t) = \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2}\right)u(t)$$

3. $(t-1)y'' + (5-4t)y\prime - 4y = 0\,; y(0) = 3,\ y'(0) = 12.$

Soit $Y = Y(p) = \mathcal{L}\left[y\right]$

$\mathcal{L}\left[y'\right] = p\mathcal{L}\left[y\right] - y(0) = pY - 3$

$\mathcal{L}\left[ty'\right] = -\dfrac{d\left(\mathcal{L}\left[y'\right]\right)}{dp} = -Y - p\dfrac{dY}{dp}$

$\mathcal{L}\left[y''\right] = p^2Y - py(0) - y'(0) = p^2Y - 3p - 12$

$\mathcal{L}\left[ty''\right] = -\dfrac{d\left(\mathcal{L}\left[y''\right]\right)}{dp} = -\left(2pY + p^2\dfrac{dY}{dp} - 3\right) = -p^2\dfrac{dY}{dp} - 2pY + 3$

Equation image :

$\mathcal{L}\left[(t-1)y'' + (5-4t)y' - 4y\right] = \mathcal{L}\left[0\right] = 0$

$\Longrightarrow \mathcal{L}\left[ty''\right] - \mathcal{L}\left[y''\right] + 5\mathcal{L}\left[y'\right] - 4\mathcal{L}\left[ty'\right] - 4\mathcal{L}\left[y\right] = 0 \Longrightarrow$

$\left(-p^2\frac{dY}{dp} - 2pY + 3\right) - \left(p^2Y - 3p - 12\right) + 5\left(pY - 3\right) - 4\left(-Y - p\frac{dY}{dp}\right) - 4Y = 0$

$\Longrightarrow \dfrac{dY}{dp}\left(-p^2 + 4p\right) + \left(-2p - p^2 + 5p + 4 - 4\right)Y + \left(3 + 3p + 12 - 15\right) = 0$

$\Longrightarrow \left(-p^2 + 4p\right)\dfrac{dY}{dp} + \left(-p^2 + 3p\right)Y + 3p = 0$

ou bien : $(p-4)\dfrac{dY}{dp} + (p-3)\,Y = 3$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre en Y. La solution générale de cette équation est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et une solution particulière de l'équation complète.

$i)$ $(p-4)\dfrac{dY}{dp} + (p-3)\,Y = 0$

$\Longrightarrow \dfrac{dY}{Y} = -\dfrac{p-3}{p-4}dp$

$\Longrightarrow \ln Y = -\displaystyle\int \frac{p-3}{p-4}dp = -p - \ln\left(p-4\right) + C$

$\quad = -\ln e^p - \ln(p-4) + \ln K = \ln\dfrac{Ke^{-p}}{p-4}$

Soit $\quad Y_1(p) = \dfrac{Ke^{-p}}{p-4}$

$ii)$ Pour déterminer une solution particulière de l'équation complète on suppose que K est une fonction soit $K = K(p)$

$\Longrightarrow Y_2(p) = \dfrac{K(p)e^{-p}}{p-4}$

$\Longrightarrow \dfrac{dY_2}{dp} = \dfrac{\left(K'e^{-p} - Ke^{-p}\right)(p-4) - Ke^{-p}}{(p-4)^2} = \dfrac{K'\left(p-4\right) - K(p-3)}{(p-4)^2}e^{-p}$

on a : $(p-4)\dfrac{dY_2}{dp} + (p-3)\,Y_2 = 3$

$\Longrightarrow \dfrac{K'\left(p-4\right) - K(p-3)}{(p-4)}e^{-p} + (p-3)\dfrac{Ke^{-p}}{p-4} = 3$

$K'e^{-p} = 3 \Longrightarrow K = 3e^p$ et $Y_2 = \dfrac{3}{p-4}$

La solution générale est donc :

$Y(p) = Y_1 + Y_2 = \dfrac{Ke^{-p}}{p-4} + \dfrac{3}{p-4} = Ke^{-p}\mathcal{L}\left(e^{4t}\right) + 3\mathcal{L}\left(e^{4t}\right)$

$\Longrightarrow y(t) = Ke^{4(t-1)} + 3e^{4t}$

La solution à chercher vérifie la condition $y(0) = 3 \Longrightarrow K = 0$
d'où : $y(t) = 3e^{4t}u\left(t\right)$

4. Le système : $\left\{\begin{array}{rcl} y' - y - 3x & = & t \\ x' - y + x & = & 0 \end{array}\right.$; $x(0) = y(0) = 0$

soit $X = \mathcal{L}\left[x\right]$ et $Y = \mathcal{L}\left[y\right]$

Le système auxiliair est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{L}\left[y' - y - 3x\right] & = & \mathcal{L}\left[t\right] \\ \mathcal{L}\left[x' - y + x\right] & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} pY - Y - 3X & = & \dfrac{1}{p^2} \\ pX - Y + X & = & 0 \end{array}\right.$$

ou $\left\{\begin{array}{rcl} -3X + (p-1)Y & = & \dfrac{1}{p^2} \\ (p+1)\,X - Y & = & 0 \end{array}\right.$

La deuxième équation nous donne : $Y = (p+1)X$

$\Longrightarrow -3X + (p-1)(p+1)X = \left(p^2 - 4\right)X = \dfrac{1}{p^2}$

$X = \dfrac{1}{p^2(p^2-4)} = -\dfrac{1}{4p^2} + \dfrac{1}{16\,(p-2)} - \dfrac{1}{16\,(p+2)}$

$\Longrightarrow x(t) = \left(-\dfrac{t}{4} + \dfrac{e^{2t}}{16} - \dfrac{e^{-2t}}{16}\right)u\left(t\right) = \left(-\dfrac{t}{4} + \dfrac{\sinh 2t}{8}\right)u\left(t\right)$

$Y = (p+1)X = \dfrac{p+1}{p^2(p^2-4)}$

$= -\dfrac{1}{4p^2} - \dfrac{1}{4p} + \dfrac{3}{16\,(p-2)} + \dfrac{1}{16\,(p+2)}$

$\Longrightarrow y(t) = -\dfrac{t+1}{4} + \dfrac{3e^{2t} + e^{-2t}}{16} = \left(-\dfrac{t+1}{4} + \dfrac{\cosh 2t}{4} + \dfrac{\sinh 2t}{8}\right)u\left(t\right)$

5. $tf'(t) + 2\displaystyle\int_0^t f(u)\sin(t-u)du = \sin t$, $t > 0$ et $f(0) = 1$

Tout d'abords remarquons que $\displaystyle\int_0^t f(u)\sin(t-u)du = f * \sin t$
Alors l'équation intégro-différentielle s'écrit :
$tf' + 2f * \sin t = \sin t \Longrightarrow \mathcal{L}\left[tf'\right] + 2\mathcal{L}\left[f * \sin t\right] = \mathcal{L}\left[\sin t\right]$
$\mathcal{L}\left[f\right] = F \Longrightarrow \mathcal{L}\left[f'\right] = pF - f(0) = pF - 1$

$\mathcal{L}\left[tf'\right] = -\dfrac{d}{dp}\left(pF - 1\right) = -p\dfrac{dF}{dp} - F$

$\mathcal{L}\left[f * \sin t\right] = \mathcal{L}\left[f\right]\mathcal{L}\left[\sin t\right] = \dfrac{F}{p^2+1}$

$\Longrightarrow -p\dfrac{dF}{dp} - F + \dfrac{2F}{p^2+1} = \dfrac{1}{p^2+1}$

$$-p(p^2+1)\frac{dF}{dp} + \left(1 - p^2\right)F = 1 \qquad (*)$$

c'est une équation différentielle du premier ordre en F

$i)$ Solution générale de l'équation sans second membre :

$-p(p^2+1)\dfrac{dF}{dp}+(1-p^2)\,F=0$

$\Longrightarrow \dfrac{dF}{F}=\dfrac{1-p^2}{p\,(p^2+1)}dp=\left(\dfrac{1}{p}-2\dfrac{p}{p^2+1}\right)dp$

$\Longrightarrow \displaystyle\int\frac{dF}{F}=\int\left(\frac{1}{p}-2\frac{p}{p^2+1}\right)dp$

$\Longrightarrow \ln F=\ln p-\ln\left(p^2+1\right)+\ln K$

$\Longrightarrow F_1(p)=\dfrac{Kp}{p^2+1}$

ii) La solution particulière de l'équation avec second membre se détermine par variation de la constante K

Soit $K=K(p)\Longrightarrow \dfrac{dF}{dp}=\dfrac{(K'p+K)\left(p^2+1\right)-2p.Kp}{\left(p^2+1\right)^2}$

$=\dfrac{K'p\left(p^2+1\right)+K(1-p^2)}{\left(p^2+1\right)^2}$

Substituons dans l'équation $(\star)$ on obtient :

$-p(p^2+1)\dfrac{K'p\left(p^2+1\right)+K(1-p^2)}{\left(p^2+1\right)^2}+\dfrac{Kp\left(1-p^2\right)}{p^2+1}=1$

donc $\dfrac{dK}{dp}=-\dfrac{1}{p^2}\Longrightarrow K=\dfrac{1}{p}$ et $F_2=\dfrac{1}{1+p^2}$

Alors la solution générale de l'équation complète est

$F(p)=F_1+F_2=\dfrac{Kp}{p^2+1}+\dfrac{1}{p^2+1}$

Le théorème de la valeur initiale nous donne la valeur de K :

$\displaystyle\lim_{p\to\infty}pF(p)=\lim_{t\to 0}f(t)=f(0)$

$\Longrightarrow \displaystyle\lim_{p\to\infty}\left(\frac{Kp^2}{p^2+1}+\frac{p}{p^2+1}\right)=K=f(0)=1$

Finalement $F(p)=\dfrac{p}{p^2+1}+\dfrac{1}{p^2+1}$ et $f(t)=(\cos t+\sin t)\,u\,(t)$

6. $y''+4y'+3y=0$ avec les conditions $y(0)=3$ et $y'(0)=1$.

   $Y\,(p)=\mathcal{L}\,(y)\,,\mathcal{L}\,(y')=pY-3,\ \mathcal{L}\,(y'')=p^2Y-3p-1$
   $\mathcal{L}\,(y''+4y'+3y)=0$
   $\Longleftrightarrow p^2Y-3p-1+4\,(pY-3)+3Y=0$
   $\Longleftrightarrow \left(p^2+4p+3\right)Y=3p+13$
   $Y=\dfrac{3p+13}{p^2+4p+3}=\dfrac{5}{p+1}-\dfrac{2}{p+3}=5\mathcal{L}\left(e^{-t}\right)-2\mathcal{L}\left(e^{-3t}\right)$
   $y\,(t)=\left(5e^{-t}-2e^{-3t}\right)u\,(t)$

7. $y''-2y'+y=\exp(t);\ y(0)=1$ et $y'(0)=0$

   Soit $Y\,(p)=\mathcal{L}\,(y)$ alors $\mathcal{L}\,(y')=pY-y\,(0)=pY-1$
   $\mathcal{L}\,(y'')=p^2Y-py\,(0)-y'\,(0)=p^2Y-p$
   L'équation image :
   $\mathcal{L}\,(y'')-2\mathcal{L}\,(y')+\mathcal{L}\,(y)=\mathcal{L}\left(e^t\right)$
   ou bien $p^2Y-p-2\,(pY-1)+Y=\dfrac{1}{p-1}$

$\Longleftrightarrow \left(p^2 - 2p + 1\right) Y - p + 2 = \dfrac{1}{p-1}$

ou bien : $\left(p^2 - 2p + 1\right) Y = \dfrac{1}{p-1} + p - 2$

$(p-1)^2 Y = \dfrac{(p-1)(p-2)+1}{p-1} = \dfrac{(p-1)^2 - (p-1) + 1}{p-1}$

Soit donc $Y = \dfrac{(p-1)^2 - (p-1) + 1}{(p-1)^3} = \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{(p-1)^2} + \dfrac{1}{(p-1)^3}$

on a $\dfrac{1}{p-1} = \mathcal{L}^{-1}\left(e^t\right)$, $\dfrac{1}{(p-1)^2} = \mathcal{L}^{-1}\left(te^t\right)$ et $\dfrac{1}{(p-1)^3} = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{2}t^2e^t\right)$

Alors : $y(t) = e^t - te^t + \dfrac{1}{2}t^2e^t = \left(\dfrac{1}{2}t^2 - t + 1\right) e^t u(t)$

8. $y'' + 3y' + 2y = \delta(t-a)$ avec les conditions $y(0) = y'(0) = 0$. $\delta(t)$ est l'impulsion de Dirac : $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$

$y(0) = y'(0) = 0 \Longrightarrow$
$\mathcal{L}(y) = Y$, $\mathcal{L}(y') = pY$ et $\mathcal{L}(y'') = p^2Y$, $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1 \Longrightarrow \mathcal{L}(\delta(t-a)) = e^{-ap}$

L'équation image s'écrit : $p^2Y + 3pY + 2Y = e^{-ap} \Longleftrightarrow \left(p^2 + 3p + 2\right) Y = e^{-ap}$
$\left(p^2 + 3p + 2\right) = (p+2)(p+1)$

Soit $Y = \dfrac{e^{-ap}}{(p+2)(p+1)}$

$\dfrac{1}{(p+2)(p+1)} = \dfrac{1}{p+1} - \dfrac{1}{p+2} = \mathcal{L}\left(e^{-t}\right) - \mathcal{L}\left(e^{-2t}\right)$

Alors $y(t) = \left(e^{-(t-a)} - e^{-2(t-a)}\right) u(t-a)$

9. $y'''(t) - 6y''(t) + 11y'(t) - 6y(t) = e^{-t}$ avec $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$ $y''(0) = -4$

$\mathcal{L}(y) = Y$, $\mathcal{L}(y') = pY - 1$, $\mathcal{L}(y'') = p^2Y - p$, $\mathcal{L}(y''') = p^3Y - p^2 + 4$
$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = e^{-t}$

$\Longrightarrow \left(p^3Y - p^2 + 4\right) - 6\left(p^2Y - p\right) + 11(pY - 1) - 6Y = \dfrac{1}{p+1}$

$\Longleftrightarrow \left(p^3 - 6p^2 + 11p - 6\right) Y - p^2 + 6p - 7 = \dfrac{1}{p+1}$

$\left(p^3 - 6p^2 + 11p - 6\right) Y = \dfrac{1}{p+1} - \left(-p^2 + 6p - 7\right) = \dfrac{p^3 - 5p^2 + p + 8}{p+1}$

$Y = \dfrac{p^3 - 5p^2 + p + 8}{(p+1)\left(p^3 - 6p^2 + 11p - 6\right)} = \dfrac{p^3 - 5p^2 + p + 8}{(p+1)(p-1)(p-2)(p-3)}$

$= -\dfrac{1}{24(p+1)} + \dfrac{5}{4(p-1)} + \dfrac{2}{3(p-2)} - \dfrac{7}{8(p-3)}$

$y(t) = -\dfrac{1}{24}e^{-t} + \dfrac{5}{4}e^t + \dfrac{2}{3}e^{2t} - \dfrac{7}{8}e^{3t}$

Exercice 6 Soit $f(t) = \sqrt{t}$ une fonction causale

1. Calculer $f * f$
2. Calculer la transformée de Laplace de $f * f$
3. Déduire la transformée de Laplace de f
4. Refaire le même exercice pour la fonction $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}; t > 0$

Solution 6

1. $f(t)$ est une fonction causale alors :

$$f*f=\int_0^{\infty} f(u)f(t-u)du=\int_0^t f(u)f(t-u)du$$
$$=\int_0^t \sqrt{u}\sqrt{t-u}du=\int_0^t \sqrt{tu-u^2}du=\int_0^t \sqrt{tu-u^2}du$$
$$=\int_0^t \sqrt{tu-u^2-\frac{t^2}{4}+\frac{t^2}{4}}du=\int_0^t \sqrt{\frac{t^2}{4}-\left(u-\frac{t}{2}\right)^2}du=\frac{t}{2}\int_0^t \sqrt{1-\left(\frac{u-\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right)^2}du$$

Soit $x=\left(\frac{u-\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right)\Longrightarrow dx=\frac{2}{t}du$ et $0\le u\le t\Longrightarrow -1\le x\le 1$

$$\Longrightarrow f*f=\frac{t^2}{4}\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

aussi posons $x=\sin\theta\Longrightarrow dx=\cos\theta$ et $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$$\Longrightarrow f*f=\frac{t^2}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\frac{t^2}{4}\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi t^2}{8}$$

2. Soit $F=\mathcal{L}[f]$

$$\mathcal{L}[f*f]=\mathcal{L}\left[\frac{\pi t^2}{8}\right]\Longrightarrow F^2=\frac{\pi}{8}\mathcal{L}[t^2]=\frac{\pi}{8}\frac{2}{p^3}=\frac{\pi}{4p^3}$$

On a $F^2=\frac{\pi}{4p^3}\Longrightarrow F=\frac{1}{2p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}$

3. $g\star g=\int_0^t g(u)g(t-u)du=\int_0^t \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{1}{\sqrt{t-u}}du=\int_0^t \frac{du}{\sqrt{tu-u^2}}$

$$=\int_0^t \frac{du}{\sqrt{\frac{t^2}{4}-\frac{t^2}{4}-tu-u^2}}=\int_0^t \frac{du}{\sqrt{\frac{t^2}{4}-(u-\frac{t}{2})^2}}=\frac{2}{t}\int_0^t \frac{du}{\sqrt{1-\left(\frac{u-\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right)^2}}$$

Soit $x=\frac{u-\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\Longrightarrow dx=\frac{2}{t}du$ et $0\le u\le t\Longrightarrow -1\le x\le 1$

$$\Longrightarrow g\star g=\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=Arc\sin x|_{-1}^1=\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{2}=\pi$$

$$\mathcal{L}[g*g]=G^2=\mathcal{L}[\pi]=\frac{\pi}{p}\Longrightarrow G(p)=\sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

Exercice 7 On définit la fonction de transfert $p\to H(p)$ d'un système, qui donne à chaque signal d'entrée $e(t)$ un signal de sortie $s(t)$, par la relation $S(p)=H(p).E(p)$; $S(p)$ et $E(p)$ sont respectivement les transformées de Laplace des signaux $s(t)$ et $e(t)$.
On considère un système de fonction de transfert $H(p)=\frac{1}{p^2+4}$.

Le signal d'entrée est défini par :

$$e(t) = \begin{cases} 2t & si \quad t \in [0,1] \\ -2t+4 & si \quad t \in [1,2] \\ 0 & si \quad t \in]-\infty,0] \cup [2,\infty[\end{cases}$$

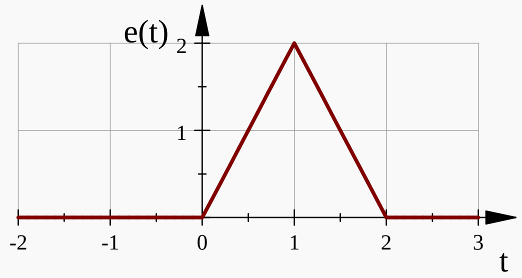
1. Tracer la courbe représentative de $e(t)$
2. Exprimer $e(t)$ à l'aide de l'échelon unité $u(t)$
3. Calculer $E(p)$
4. Déterminer la fonction temporelle $f(t)$ dont l'image est :

$$F(p) = \frac{1}{p^2\,(p^2+4)}$$

5. Calculer la réponse $S(p)$ et en déduire le signal de sortie $s(t)$
6. Préciser les valeurs de $s(t)$ dans les intervalles : $]-\infty,0]$, $[0,1[$, $[1,2[$, $[2,\infty[$
7. Tracer le graphe de $s(t)$

Solution 7

1. La courbe représentative de $e(t)$:



2. $e(t)$ est constitué de deux segments de droites :

$$\begin{array}{ccc} 2t & si & t \in [0,1] \\ -2t+4 & si & t \in [1,2] \end{array}$$

$2tu(t)$ nous donne le demi droite dans le demi-plan $t \geq 0$ et $2tu(t-1)$ celle dans le demi-plan $t \geq 2$ donc le segment $2t$ dans $[0,1]$ peut donner par :

$$2tu(t) - 2tu(t-1)$$

pour le deuxième segment il faut éliminer le segment dans $[0,1]$ et la demi-droit dans $[2,\infty[$ il peut être exprimé par :

$$(-2t+4)\,u(t-1) - (-2t+4)\,u(t-2)$$

Alors on peut exprimer $e\,(t)$ en fonction de $u\,(t)$:
$e(t) = 2tu(t) + (-2t-2t+4)\,u(t-1) - (-2t+4)\,u(t-2)$
Soit $e(t) = 2tu(t) - 4(t-1)u(t-1) + 2(t-2)u(t-2)$
ou bien en posant $u_a = u\,(t-a)$

$$e\,(t) = 2tu_0 - 4\,(t-1)\,u_1 + 2\,(t-2)\,u_2$$

3. Calcul de $E(p)$

On a $\mathcal{L}\left[(t-a)\,u(t-a)\right] = \dfrac{e^{-ap}}{p^2}$ alors :

$$E(p) = \mathcal{L}\left(2tu(t) - 4(t-1)u(t-1) + 2(t-4)u(t-2)\right)$$
$$= \frac{2}{p^2} - \frac{4}{p^2}e^{-p} + \frac{2}{p^2}e^{-2p}$$
$$= \frac{2}{p^2}\left(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}\right) = \frac{2\left(1-e^{-p}\right)^2}{p^2}$$

4. $F(p) = \dfrac{1}{p^2\left(p^2+4\right)} = \dfrac{1}{4p^2} - \dfrac{1}{4\left(p^2+4\right)} = \dfrac{1}{4}\mathcal{L}\left[t\right] - \dfrac{1}{4}\mathcal{L}\left[\dfrac{\sin 2t}{2}\right]$

$$f(t) = \frac{2t - \sin 2t}{8}$$

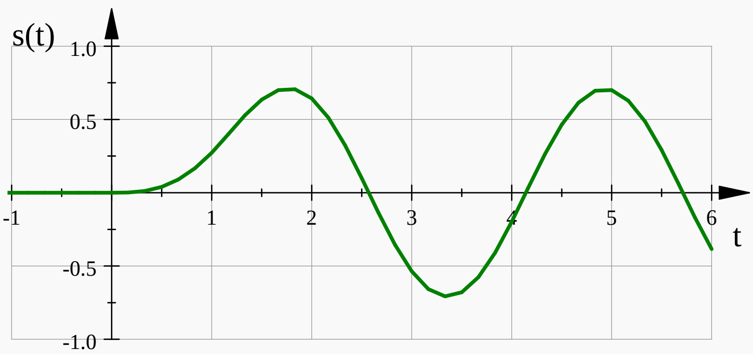
5. Calcul de la réponse $S(p)$ et le signal de sortie $s(t)$

$$S(p) = H(p).E(p) = \frac{1}{p^2+4}\left(\frac{2}{p^2} - \frac{4}{p^2}e^{-p} + \frac{2}{p^2}e^{-2p}\right)$$
$$= \frac{2}{p^2(p^2+1)} - \frac{4e^{-p}}{p^2(p^2+1)} + \frac{2e^{-2p}}{p^2(p^2+1)}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{(p^2+4)}\right) - \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{(p^2+4)}\right)e^{-p} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{(p^2+4)}\right)e^{-2p}$$
$$s(t) = \frac{1}{4}\left(2t - \sin 2t\right)u_0 + \left(\frac{1}{2}\sin\left(2t-2\right) - t + 1\right)u_1 - \frac{1}{4}\left(\sin\left(2t-4\right) - 2t + 4\right)u_2$$

6. les valeurs de $s(t)$ dans les intervalles : $]-\infty, 0[\,, [0,1[\,, [1,2[\,, [2,\infty[$

$$s\left(t\right) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin\left(2t\right) & si \quad 0 \leq t < 1 \\ 1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin\left(2t\right) + \frac{1}{2}\sin(2t-2) & si \quad 1 \leq t < 2 \\ -\frac{1}{4}\sin\left(2t\right) + \frac{1}{2}\sin(2t-2) - \frac{1}{4}\sin(2t-4) & si \quad t \geq 2 \end{cases}$$

7. graphe de $s(t)$



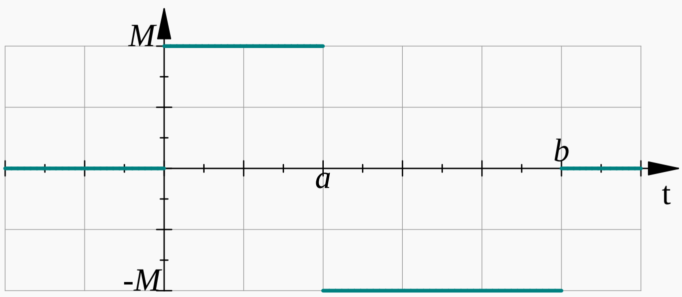
Exercice 8 On considère un circuit R, L auquel on applique une f.e.m $e(t)$; pour $t > 0$:

$$e(t) = \begin{cases} M & si \quad t \in]0, a[\\ -M & si \quad t \in]a, b[\\ 0 & si \quad t \in]b, \infty[\end{cases} ; e(0) = 0$$

1. Tracer le graphe de $e(t)$
2. Exprimer $e(t)$ à l'aide de la fonction échelon unité
3. Calculer la transformée de Laplace $E(p)$ de $e(t)$
4. Ecrire l'équation différentielle(D) qui régit le circuit
5. Calculer la fonction originale de $G(p) = \dfrac{M \exp(-\alpha p)}{p(Lp + R)}, \alpha \in \mathbb{R}^+$.
6. Résoudre (D) à l'aide de la transformée deLaplace et donner les expressions de l'intensité du courant $i(t)$ dans les intervalles $]-\infty, 0[$, $[0, a[$, $[a, b[$ et $[b, \infty[$
7. Tracer le graphe de $i(t)$ si $M = 2V$, $R = 10\Omega$, $L = 0.1H$, $a = 0.02s$, $b = 0.04s$

Solution 8

1. graphe de $e(t)$



2. $e(t) = M[u(t) - u(t-a)] + (-M)[-u(t-a) - u(t-b)]$

$$= M[u(t) - 2u(t-a) + u(t-b)] = M(u_0 - 2u_a + u_b)$$

$E(p) = \mathcal{L}(M[u(t) - 2u(t-a) + u(t-b)]) = M(\mathcal{L}(u_0) - 2\mathcal{L}(u_a) + \mathcal{L}(u_b))$

$$E(p) = M\left[\frac{1}{p} - \frac{2}{p}e^{-ap} + \frac{1}{p}e^{-bp}\right]$$

3. C'est un circuit R, L alors :

$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt} + Ri = e(t) \\ i(0) = 0 \end{cases} \qquad (D)$$

4. $G(p) = \dfrac{M \exp(-\alpha p)}{p(Lp+R)} = \dfrac{Me^{-\alpha p}}{R}\left[\dfrac{1}{p} + \dfrac{L}{Lp+R}\right] = \dfrac{Me^{-\alpha p}}{R}\left[\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p + R/L}\right]$

d'où :

$$g_\alpha(t) = \frac{M}{R}\left(1 + e^{-\frac{R}{L}(t-\alpha)}\right)u_\alpha$$

5. L'équation auxiliaire de (D) est :

$$\mathcal{L}\left[L\frac{di}{dt} + Ri = e(t)\right] \Longrightarrow L\mathcal{L}\left[\frac{di}{dt}\right] + R\mathcal{L}[i] = \mathcal{L}[e]$$

$$\Longrightarrow L\left[pI - i(0)\right] + RI = E(p)\,;\text{ avec : } I(p) = \mathcal{L}\left[i\right]$$

$$\Longrightarrow (Lp + R)\,I = M\left[\frac{1}{p} - \frac{2}{p}e^{-ap} + \frac{1}{p}e^{-bp}\right]$$

$$\Longrightarrow I(p) = \frac{M}{p(Lp+R)}\left(1 - 2e^{-ap} + e^{-bp}\right) = G_0\,(p) - 2G_a\,(p) + G_b\,(p)$$

D'où :

$$i\,(t) = \frac{M}{R}\left[\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)u(t) - 2\left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-a)}\right)u(t-a) + \left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-b)}\right)u(t-b)\right]$$

(a) Si $t < 0 \Longrightarrow u_0 = u_a = u_b = 0$ donc $i(t) = 0$

(b) Si $0 \leq t < a \Longrightarrow u_0 = 1$ et $u_a = u_b = 0$ donc $i(t) = \dfrac{M}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

(c) Si $a \leq t < b \Longrightarrow u_0 = u_a = 1$ et $u_b = 0$ donc $i(t) = \dfrac{M}{R} - 1 - e^{-\frac{R}{L}t} - 2e^{-\frac{R}{L}(t-a)}$

(d) Si $t \geq b \Longrightarrow u_0 = u_a = u_b = 1$ donc $i(t) = \dfrac{M}{R}\left(-e^{-\frac{R}{L}t} + e^{-\frac{R}{L}(t-a)} - e^{-\frac{R}{L}(t-b)}\right)$

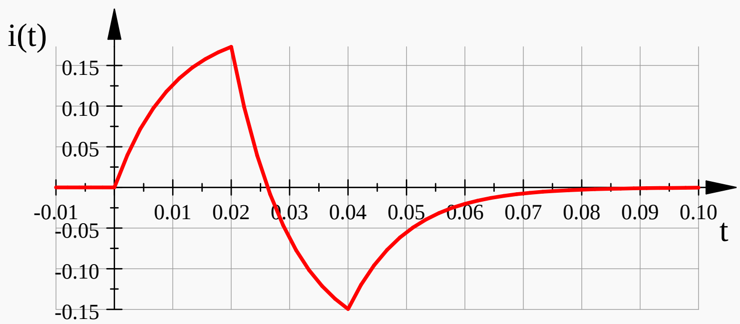
6. Graphe de $i(t)$ avec $M = 2V$, $R = 10\Omega$, $L = 0.1H$, $a = 0.02s$, $b = 0.04s$

En utilisant les donnés numériques, nous obtenons :

$$\begin{array}{ccc} t < 0 & \Longrightarrow & i = 0 \\ 0 \leq t < 0.02 & \Longrightarrow & i = \frac{1}{5}\left(1 - e^{-100t}\right) \\ 0.02 \leq t < 0.04 & \Longrightarrow & i = \frac{1}{5}\left(-1 - e^{-100t} + 2e^{2-100t}\right) \\ t \geq 0.04 & \Longrightarrow & i = \frac{1}{5}\left(-e^{-100t} + 2e^{2-100t} - e^{4-100t}\right) \end{array}$$

A partir des données ci-dessus nous obtenons le tableau de variation suivante :

t	$-\infty$	0		0.02		0.04		$+\infty$
$i'(t)$	0	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$i(t)$	$\rightarrow$	0	$\nearrow$	0.17	$\searrow$	0.14	$\nearrow$	



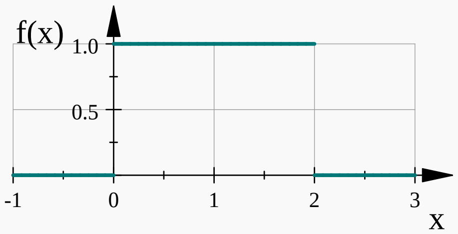
Exercice 9 On définit la fonction porte $f_a\,(x)$ et la fonction échelon $u_a\,(x) = u\,(x-a)$ par :

$$f_a\,(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & Ailleurs \end{cases}, u_a\,(x) = \begin{cases} +1 & si \quad x \geq a \\ 0 & si \quad x < a \end{cases}$$

1. Tracer la courbe de $f_a(x)$, et calculer, par intégration, sa transformée de Laplace
2. Déduire la transformée de $xf_a(x)$
3. Donner une expression de $f_a(x)$ en fonction de $u_a(x)$ et retrouver sa transformée de Laplace.
4. Donner une forme explicite, en fonction de $u_a(x)$ de $g_a(x) = \int_0^x f_a(x) f_a(x-y)\, dy$ et Montrer que $\mathcal{L}(g_a)(p) = [\mathcal{L}(f_a)(p)]^2$
5. Calculer les valeurs de $g_a(x)$ dans les intervalles $]-\infty, 0[\,;\,]0, a[\,;\,]a, 2a[\,;\,]2a, +\infty[$
6. Tracer la courbe de $g_a(x)$
7. Déterminer la fonction temporelle $h_\alpha(x)$ dont la transformée de Laplace est
$$H_\alpha(p) = \frac{e^{-\alpha p}}{p^2(Lp+R)}$$
avec α, L et R sont des constantes non nulles.
8. Résoudre, à l'aide de transformation de Laplace, l'équation différentielle :
$$L\frac{dy}{dx} + Ry = g_a(x)\,;\, g_a(0) = 0$$
et exprimer $y(x)$ à l'aide de $h_0(x)$, $h_a(x)$ et $h_{2a}(x)$

Solution 9

1. Graphe de $f_a(x)$



Graphe de $f_2(x)$

$$F_a(p) = \int_0^\infty f_a(x) e^{-px} dx = \int_0^a e^{-px} dx = \left.\frac{e^{-px}}{p}\right|_0^a = \frac{1-e^{-ap}}{p}$$

2. la transformée de $xf_a(x)$ est $F_{1a}(p) = -\frac{dF_a}{dp}$
$$F_{1a}(p) = -\frac{d}{dp}\left(\frac{1-e^{-ap}}{p}\right) = \frac{1-ae^{-ap}p - e^{-ap}}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{ae^{-ap}}{p} - \frac{e^{-ap}}{p^2}$$
3. $f_a(x) = u(x) - u(x-a) = u_0 - u_a$
$$\Longrightarrow F_a(p) = \mathcal{L}[u_0] - \mathcal{L}[u_a] = \frac{1}{p} - \frac{e^{-ap}}{p}$$
4. $g_a(x) = \int_0^x f_a(y) f_a(x-y)\, dy = f_a * f_a$
$$= (u_0 - u_a) * (u_0 - u_a)$$
$$= u_0 * u_0 - 2u_0 * u_a + u_a * u_a$$

$$\mathcal{L}(g_a) = \mathcal{L}(u_0 * u_0 - 2u_0 * u_a + u_a * u_a) = \mathcal{L}(u_0 * u_0) - 2\mathcal{L}(u_0 * u_a) + \mathcal{L}(u_a * u_a)$$
$$= (\mathcal{L}(u_0))^2 - 2\mathcal{L}(u_0)\mathcal{L}(u_a) + (\mathcal{L}(u_a))^2 = (\mathcal{L}(u_0) - \mathcal{L}(u_a))^2$$
$$= [\mathcal{L}(f_a)]^2 = \left(\frac{1-e^{-ap}}{p}\right)^2$$

5. $\mathcal{L}(g_a) = \left(\frac{1-e^{-ap}}{p}\right)^2 = \frac{1}{p^2} - \frac{2e^{-ap}}{p^2} + \frac{e^{-2(ap)}}{p^2} \Longrightarrow$

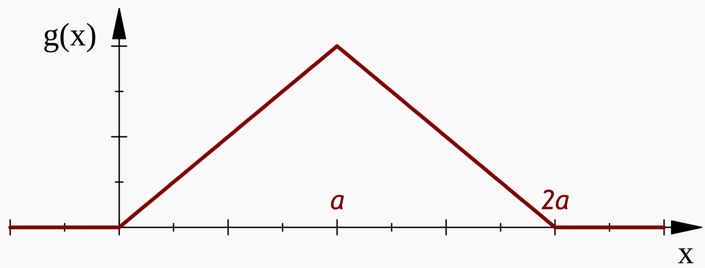
$$g_a(x) = xu_0 - 2(x-a)u_a + (x-2a)u_{2a}$$

- Si $x \in]-\infty, 0] \Longrightarrow u_0 = u_a = u_{2a} = 0 \Longrightarrow g_a(x) = 0$
- Si $x \in]0, a] \Longrightarrow u_0 = 1$, $u_a = u_{2a} = 0 \Longrightarrow g_a(x) = x$
- Si $x \in]a, 2a] \Longrightarrow u_0 = u_a = 1, u_{2a} = 0 \Longrightarrow g_a(x) = x - 2(x-a) = -x + 2a$
- Si $x > 2a \Longrightarrow u_0 = u_a = u_{2a} = 1 \Longrightarrow g_a = x - 2(x-a) + (x-2a) = 0$

Soit

$$g(x) = \begin{cases} x & si \quad x \in]0, a] \\ -x + 2a & si \quad x \in]a, 2a] \\ 0 & si \quad x > 2a \end{cases}$$

6. le graphe de $g_a(x)$



7. $H_\alpha(p) = \frac{e^{-\alpha p}}{p^2(Lp+R)}$

$\frac{1}{p^2(Lp+R)} = -\frac{L}{R^2}\frac{1}{p} + \frac{1}{Rp^2} + \frac{L}{R^2\left(p + \frac{R}{L}\right)}$

$\Longrightarrow h_\alpha(x) = \left[-\frac{L}{R^2} + \frac{x-\alpha}{R} + \frac{L}{R^2}\exp\left(-\frac{R(x-\alpha)}{L}\right)\right] u(x-\alpha)$

8. $L\frac{dy}{dx} + Ry = g_a(x)$

$\mathcal{L}\left(L\frac{dy}{dx} + Ry\right) = \mathcal{L}(g_a(x)) \Longrightarrow LpY + RY = G$

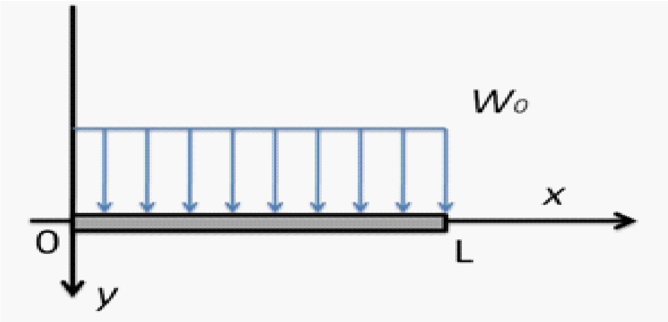
$Y = \frac{G}{Lp+R} = \frac{1-2e^{-ap}+e^{-2ap}}{p^2(Lp+R)} = H_0 - 2H_a + H_{2a}$

$$y(x) = h_0(x) - 2h_a(x) + h_{2a}(x) \tag{1}$$

Exercice 10 Une poutre de longueur L supporte une charge par unité de longueur $W(x)$ (*pour* $0 \leq x \leq L$) qui agit verticalement. Il en résulte que l'axe de cette poutre présente, en tout point x, une flèche $y(x)$ qui est solution de l'équation différentielle (D) suivante :

$$y^{(4)}(x) = \frac{W(x)}{EI} \tag{D}$$

où E est le module d'élasticité de la poutre, et I son moment d'inertie par rapport à son axe.
On suppose que les extrémités de la poutre sont posées, c'est-à-dire qu'à ces extrémités $x = 0$ et $x = L$, $y = y'' = 0$.



On suppose que les extrémités de la poutre sont posées, c'est-à-dire qu'à ces extrémités $x = 0$ et $x = L : y = y'' = 0$.
Soit $Y(p)$ la transformée de Laplace de $y(x)$.

1. On considère la charge constante : $W(x) = ct^{\underline{e}} = W_0$.
   (a) Exprimer la charge W_0 en fonction de la fonction échelon $u_L(x)$ (ou $u(x - L)$)
   (b) Ecrire les transformées de Laplace des dérivées successives de $y(x)$ en fonction de p et de $Y(p)$.
   (c) A partir de l'équation différentielle (D), donner l'expression de $Y(p)$ en fonction de p, $y'(0)$ et $y'''(0)$.
   (d) Trouver l'originale de $Y(p)$.
   (e) Calculer $y'(0)$ et $y'''(0)$ à partir des conditions en $x = L$
   (f) Trouver $y(x)$ pour $0 \leq x \leq L$.
2. On suppose maintenant que la charge $W(x)$ n'est plus constante, mais $W(x) = EI \sin \omega x$. $(pour\ 0 \leq x \leq L)$.
   Trouver dans ce cas, la flèche $y(x)$, en considérant les conditions initiales suivantes : $y'(0) = a$, $y'''(0) = b$ et $y(0) = y''(0) = 0$.

Solution 10

1. <u>*Charge constante*</u> $W(x) = W_0 = ct^{\underline{e}}$
   (a) Hors de l'intervalle $[0, L]$ $W_0 = 0$ donc $W_0 = W_0(u_0 - u_L)$
   (b) $\mathcal{L}(y) = Y(p) \qquad et\ y(0) = y''(0) = 0$
   $\mathcal{L}(y') = pY - y(0) = pY$
   $\mathcal{L}(y'') = p^2Y - py(0) - y'(0) = p^2Y - a =$
   $\mathcal{L}(y''') = p^3Y - p^2y(0) - py'(0) - y''(0) = p^3Y - ap$
   $\mathcal{L}(y'''') = p^4Y - p^3y(0) - p^2y'(0) - py''(0) - y'''(0) = p^4Y - ap^2 - b$
   (c) L'équation auxiliaire : $\mathcal{L}\left(y^{(4)}\right) = \mathcal{L}\left(\dfrac{W_0}{EI}\right) = \dfrac{W_0}{EI}\mathcal{L}(U_0 - U_L)$
   $$\Longrightarrow p^4Y - ap^2 - b = \frac{W_0}{EI}\left(\frac{1}{p} - \frac{e^{-LP}}{p}\right)$$
   $$Y(p) = \frac{W_0}{p^5EI}\left(1 - e^{-Lp}\right) + \frac{b}{p^4} + \frac{a}{p^2}$$

(d) on sait que $\mathcal{L}\left((x-L)^n u(x-L)\right) = \dfrac{n! e^{-Lp}}{p^{n+1}} \Longrightarrow \dfrac{e^{-Lp}}{p^{n+1}} = \mathcal{L}\left(\dfrac{(x-L)^n}{n!} u(x-L)\right)$

Alors
$y(x) = \dfrac{W_0}{EI}\left(\dfrac{x^4}{4!} + b\dfrac{x^3}{3!} + a\dfrac{x}{1!}\right) u(x) - \dfrac{W_0}{EI}\dfrac{(x-L)^4}{4!} u(x-L)$
Mais puisque $0 \le x \le L$ le dernier terme n'intervient pas, d'où

$$y(x) = \frac{W_0}{EI}\left(\frac{x^4}{24} + b\frac{x^3}{6} + ax\right)$$

(e) $y'(x) = \dfrac{W_0}{EI}\left(\dfrac{x^3}{6} + b\dfrac{x^2}{2} + a\right)$

$y''(x) = \dfrac{W_0}{EI}\left(\dfrac{x^2}{2} + bx\right)$

$y''(L) = \dfrac{W_0}{EI}\left(\dfrac{L^2}{2} + bL\right) = 0 \Longrightarrow b = -\dfrac{L}{2}$

$y(L) = \dfrac{W_0}{EI}\left(\dfrac{L^4}{24} + b\dfrac{L^3}{6} + aL\right) = 0 \Longrightarrow \dfrac{L^3}{24} + b\dfrac{L^2}{6} + a = 0$

$\Longrightarrow y'(0) = -\left(\dfrac{L^3}{24} + b\dfrac{L^2}{6}\right) = -\left(\dfrac{L^3}{24} - \dfrac{L^3}{12}\right) = \dfrac{1}{24}L^3$

(f) $y(x) = \dfrac{W_0}{EI}\left(\dfrac{x^4}{4!} + \left(-\dfrac{L}{2}\right)\dfrac{x^3}{3!} + \left(\dfrac{L^3}{24}\right)\dfrac{x}{1!}\right) = \dfrac{1}{EI}W_0\left(\dfrac{1}{24}L^3x - \dfrac{1}{12}Lx^3 + \dfrac{1}{24}x^4\right)$

$$y(x) = \frac{W_0}{24EI}\left(x^4 - 2Lx^3 + L^3x\right)$$

2. $W(x) = EI\sin\omega x$ avec $y'(0) = a$ et $y'''(0) = b$

$\mathcal{L}\left(y^{(4)}\right) = \mathcal{L}\left(\dfrac{W_0}{EI}\right) \Longrightarrow p^4Y - ap^2 - b = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2} \Longrightarrow Y = \dfrac{a}{p^2} + \dfrac{b}{p^4} + \dfrac{\omega}{(p^2+\omega^2)p^4}$

$\dfrac{\omega}{(p^2+\omega^2)p^4} = \dfrac{1}{p^4\omega} - \dfrac{1}{p^2\omega^3} + \dfrac{1}{\omega^3(p^2+\omega^2)} = \mathcal{L}\left(\dfrac{x^3}{6\omega} - \dfrac{x}{\omega^3} + \dfrac{\sin\omega x}{\omega^4}\right)$

$\dfrac{a}{p^2} = \mathcal{L}(ax)$

$\dfrac{b}{p^4} = \mathcal{L}\left(\dfrac{1}{6}bx^3\right)$

$$y(x) = \left(a - \frac{1}{\omega^3}\right)x + \frac{1}{6}\left(b + \frac{1}{\omega}\right)x^3 + \frac{\sin\omega x}{\omega^4}$$

Exercice 11 Soit f une fonction admettant une transformée de Laplace : $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$, telle que :

$$\int_0^t \frac{f(x)}{\sqrt{t-x}}dx = t^n; n \in \mathbb{N} \text{ et } t > 0 \tag{2}$$

On donne : $\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \sqrt{\dfrac{\pi}{p}}$. et $1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 2n - 1 = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$

1. Trouver $F(p)$.
2. Calculer $\mathcal{L}\left(t^{n-1/2}\right)$ à partir de $\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, en déduire f.

Solution 11

1. L'équation (1) est équivalente à : $t^{-1/2} * f(t) = t^n$
2. Alors : $\mathcal{L}\left(t^{-1/2} * f(t)\right) = \mathcal{L}(t^n) \Longleftrightarrow \mathcal{L}\left(t^{-1/2}\right) F = \mathcal{L}(t^n)$ou bien $\sqrt{\dfrac{\pi}{p}} F(p) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$

   Donc :

$$F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}\sqrt{\frac{p}{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{n!}{p^{n+1/2}}$$

   On a $\forall n \in \mathbb{N} : \mathcal{L}(t^n g(t)) = (-1)^n \dfrac{d^n}{dp^n}\mathcal{L}(g)$

   $\mathcal{L}\left(t^{1-1/2}\right) = \mathcal{L}\left(t \times t^{-1/2}\right) = -\dfrac{d}{dp}\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = -\dfrac{d}{dp}\sqrt{\dfrac{\pi}{p}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\dfrac{1}{p^{3/2}}$

   $\mathcal{L}\left(t^{2-1/2}\right) = -\dfrac{d}{dp}\mathcal{L}\left(t^{1-1/2}\right) = -\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\dfrac{1}{p^{3/2}}\right) = \sqrt{\pi}\dfrac{3}{2\times 2}\dfrac{1}{p^{5/2}}$

   $\mathcal{L}\left(t^{3-1/2}\right) = -\dfrac{d}{dp}\mathcal{L}\left(t^{3-1/2}\right) = -\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{3\sqrt{\pi}}{2\times 2}\dfrac{1}{p^{5/2}}\right) = \sqrt{\pi}\dfrac{3\times 5}{2\times 2\times 2}\dfrac{1}{p^{7/2}}$

   $\mathcal{L}\left(t^{n-1/2}\right) = \sqrt{\pi}\dfrac{3\times 5\times 7\times\cdots\times 2n-1}{2\times 2\times 2\times\cdots\times 2}\dfrac{1}{p^{n+1/2}} = \sqrt{\pi}\dfrac{3\times 5\times 7\times\cdots\times 2n-1}{2^n}\dfrac{1}{p^{n+1/2}}$

   $1\times 3\times 5\times\cdots\times 2n-1 = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$

   $\Longrightarrow \mathcal{L}\left(t^{n-1/2}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}}\dfrac{(2n)!}{n!}\dfrac{1}{p^{n+1/2}}$

   $\dfrac{1}{p^{n+1/2}} = \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}}\dfrac{n!}{(2n)!}\mathcal{L}\left(t^{n-1/2}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{n!}\mathcal{L}(f) \Longrightarrow$

$$f(t) = \frac{2^{2n}}{\pi}\frac{(n!)^2}{(2n)!}t^{n-1/2}$$

Exercice 12 Calculer les transformées de laplace de

$$f(t) = \int_0^t \frac{1-\cos x}{x}dx \quad et \quad g(t) = \int_0^t \frac{1-e^{-x}}{x}dx$$

Solution 12

$\mathcal{L}(1-\cos x) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{p}{p^2+1}$

$H(p) = \mathcal{L}\left(\dfrac{1-\cos x}{x}\right) = -\int\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{p}{p^2+1}\right)dp$

$\quad = -\ln p + \frac{1}{2}\ln\left(p^2+1\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{p^2+1}{p^2}\right)$

On a $f(t) = \int\limits_0^t h(x)\,dx$ donc $F(p) = \mathcal{L}(f) = \dfrac{H(p)}{p} = \dfrac{1}{2p}\ln\left(\dfrac{p^2+1}{p^2}\right)$

On a $g'(t) = \dfrac{1-e^{-t}}{t} \Longrightarrow t\dfrac{dg}{dt} = 1-e^{-t}$

$-\dfrac{d}{dp}\mathcal{L}[g'] = -\dfrac{d}{dp}[pG(p) - g(0)] = -\dfrac{d}{dp}[pG(p)] = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$

$$\Longrightarrow pG(p) = -\ln p + \ln(1+p) = \ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

$$G(p) = \frac{1}{p}\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

Exercice 13 On considère le signal $x(t)$ défini par

$$x(t) = \begin{cases} 0 & si & t<0 \\ t & si & 0 \leq t < 10 \\ 0 & si & t \geq 10 \end{cases}$$

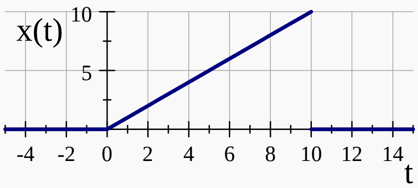
1. Tracer le graphe de $x(t)$
2. On note $X(p)$ la transformée de Laplace de $x(t)$. Calculer $X(p)$
3. Soit $y(t)$ le signal réponse d'un système tel que sa transformée de Laplac est

$$Y(p) = \frac{X(p)}{1+10p}$$

Déterminer $y(t)$ et tracer son graphe.

Solution 13

1. Graphe :



$x(t)$

2. $X(p) = \int\limits_0^{+\infty} x(t)\, e^{-pt}dt = \int\limits_0^{10} te^{-pt} = -\dfrac{10pe^{-10p}+e^{-10p}-1}{p^2} = \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1+10p}{p^2}e^{-10p}$
3. $Y(p) = \dfrac{X(p)}{1+10p} = \dfrac{1}{p^2(1+10p)} - \dfrac{e^{-10p}}{p^2}$

$= \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{10}{p} + \dfrac{100}{1+10p} - \dfrac{e^{-10p}}{p^2} = \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{10}{p} + \dfrac{10}{p+1/10} - \dfrac{e^{-10p}}{p^2}$

$= \mathcal{L}(tu(t)) - 10\mathcal{L}(u(t)) + 10\mathcal{L}\left(\exp\left(-\dfrac{t}{10}\right)u(t)\right) - \mathcal{L}((t-10)\,u(t-10))$

Soit finalement $y(t) = \left(t - 10 + 10e^{-t/10}\right)u(t) - (t-10)\,u(t-10)$