Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Signal déterministe ( MAA107 )

# Chapitre 9 : Transformée de Fourier de distributions

**Attention**

Dans tous les exercices suivants on désignera par :
$D$ : l'ensemble des fonctions tests. $\varphi(t)$ : une fonction test.
$D'$ : l'ensemble des distributions. $T(t)$ est une distribution

**Exercice 1** Calculer la transformée de Fourier de la distribution $\left[\cos^2 2\pi\omega t\right]$

**SOLUTION 1**

On peut calculer la transformée de Fourier de $\cos^2 2\pi\omega t$ par deux méthodes :

**1$^{ere}$ méthode:** :

On a $\cos^2 2\pi\omega t = \dfrac{1+\cos 4\pi\omega t}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\left[e^{4j\pi\omega t} + e^{-4j\pi\omega t}\right]$

$\Longrightarrow \mathcal{F}(T) = \mathcal{F}\left[\dfrac{1}{2}\right] + \dfrac{1}{4}\mathcal{F}\left[e^{4j\pi\omega t} + e^{-4j\pi\omega t}\right]$

$\mathcal{F}\left(e^{2j\pi\alpha t}\right) = \delta(\nu - a) \Longrightarrow \mathcal{F}\left(e^{\pm 4j\pi\omega t}\right) = \delta(\nu \pm 2\omega)$ , $\mathcal{F}(1) = \delta(\nu)$ soit :

$$\mathcal{F}(T) = \frac{1}{2}\delta(\nu) + \frac{\delta(\nu - 2\omega) + \delta(\nu + 2\omega)}{4}$$

**2$^{ième}$ méthode** :

$$\mathcal{F}(\cos 2\pi\omega t) = \mathcal{F}\left(\frac{e^{2j\pi\omega t} + e^{2j\pi\omega t}}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\mathcal{F}\left(e^{2j\pi\omega t}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{F}\left(e^{-2j\pi\omega t}\right) = \frac{1}{2}\delta(\nu - \omega) + \frac{1}{2}\delta(\nu - \omega)$$

$\mathcal{F}\left(\cos^2 2\pi\omega t\right) = \mathcal{F}(\cos 2\pi\omega t \times \cos 2\pi\omega t) = \mathcal{F}(\cos 2\pi\omega t) * \mathcal{F}(\cos 2\pi\omega t)$

$= \dfrac{1}{4}\left[\delta(\nu - \omega) + \delta(\nu - \omega)\right] * \left[\delta(\nu - \omega) + \delta(\nu - \omega)\right]$

$= \dfrac{1}{4}\left\{\delta(\nu - \omega) * \delta(\nu - \omega) + \delta(\nu + \omega) * \delta(\nu - \omega) + \delta(\nu - \omega) * \delta(\nu + \omega) + \delta(\nu + \omega) * \delta(\nu + \omega)\right\}$

D'après le définition du produit de convolution :

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T(x), \langle S(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle$$

et $\forall\, T$,on a :

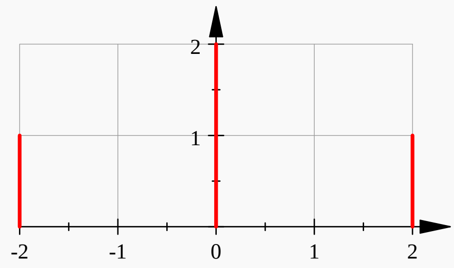
$$T * \delta(t-a) = T(t-a)$$

Donc :

$\delta(\nu - \omega) * \delta(\nu - \omega) = \delta(\nu - 2\omega)$

$\delta(\nu+\omega) * \delta(\nu-\omega) = \delta(\nu)$
$\delta(\nu+\omega) * \delta(\nu+\omega) = \delta(\nu+2\omega)$
d'où :

$$\mathcal{F}\left(\cos^2 2\pi\omega t\right) = \frac{\delta(\nu-2\omega) + 2\delta(\nu) + \delta(\nu+2\omega)}{4}$$




Spectre de $F(\nu)$ pour $\omega = 1$

**Exercice 2** Pour les distributions régulières $T = [f]$ suivantes : Calculer $T', T''$et $T'''$ Puis déduire la transformée de Fourier $\mathcal{F}(T)$.

1. $f(x) = \cos x$
2. $f(x) = \sin x$
3. $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} 2 & si \quad -2 < x \leq -1 \\ 1+x^2 & si \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & si \quad 1 \leq x < 2 \end{cases}$
   et nulle ailleurs
5. $f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & si \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & si \quad non \end{cases}$

## SOLUTION 2

1. $f(x) = \cos x$
   $f' = -\sin x,\ f'' = -\cos x,\ f''' = \sin x$
   on a $\sin x = \dfrac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \Longrightarrow \mathcal{F}(\sin x) = \dfrac{1}{2j}\left(\mathcal{F}\left(e^{jx}\right) - \mathcal{F}\left(e^{-jx}\right)\right)$
   $\mathcal{F}\left(e^{2j\pi\alpha t}\right) = \delta(\nu - a) \Longrightarrow \mathcal{F}(\sin x) = \dfrac{1}{2j}\left(\delta\left(\nu - \dfrac{1}{2\pi}\right) - \delta\left(\nu + \dfrac{1}{2\pi}\right)\right)$
   D'autre part $\mathcal{F}(T^n) = (2j\pi\nu)^n \mathcal{F}(T) \Longleftrightarrow \mathcal{F}(T) = (2j\pi\nu)^{-n} \mathcal{F}\left(T^{(n)}\right)$
   $\Longrightarrow \mathcal{F}(\cos x) = \dfrac{1}{(2j\pi\nu)^3}\mathcal{F}(\sin x) = \dfrac{1}{(2j\pi\nu)^3}\dfrac{1}{2j}\left(\delta\left(\nu - \dfrac{1}{2\pi}\right) - \delta\left(\nu + \dfrac{1}{2\pi}\right)\right)$
   $= \dfrac{1}{2}\left(\left.\dfrac{\delta\left(\nu - \frac{1}{2\pi}\right)}{(2\pi\nu)^3}\right|_{\nu = \frac{1}{2\pi}} - \left.\dfrac{\delta\left(\nu + \frac{1}{2\pi}\right)}{(2\pi\nu)^3}\right|_{\nu = \frac{-1}{2\pi}}\right)$

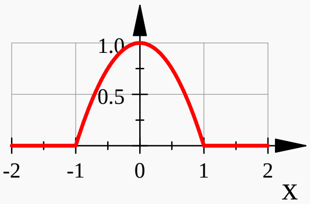
$$\mathcal{F}(\cos x) = \frac{1}{2}\left(\delta\left(\nu - \frac{1}{2\pi}\right) + \delta\left(\nu + \frac{1}{2\pi}\right)\right)$$

2. De même on trouve

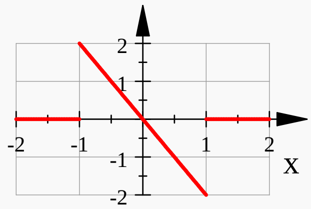
$$\mathcal{F}(\sin x) = \frac{1}{2j}\left(\delta\left(\nu - \frac{1}{2\pi}\right) - \delta\left(\nu + \frac{1}{2\pi}\right)\right)$$

3. $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$ $f(x)$ est continue donc $T'_f = T_{f'}$ et

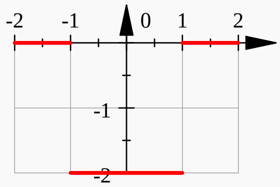
$f'(x) = \begin{cases} -2x & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$ $\quad f''(x) = \begin{cases} -2 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$ $\quad f''' = 0$




$f(x)$




$f'(x)$




$f''(x)$

$f'(x)$ a deux points de discontinuité $x = \pm 1$ et $\Delta f'(\pm 1) = 2$

$T'' = -2\left[P_2(x)\right] + 2\delta(x+1) + 2\delta(x-1)$

$f''(x)$ a deux points de discontinuité $x = \pm 1$ et $\Delta f''(\pm 1) = \pm 2$

$[f'']' = -2\delta(x+1) + 2\delta(x-1)$

$T''' = -2\delta(x+1) + 2\delta(x-1) + 2\delta'(x+1) + 2\delta'(x-1)$

on a $\mathcal{F}(\delta(x-a)) = \exp(-2j\pi\nu a)$ et $\mathcal{F}(\delta'(x-a)) = 2j\pi\nu \exp(-2j\pi\nu a)$ alors

$\mathcal{F}(T''') = -2e^{2j\pi\nu} + 2e^{-2j\pi\nu} + 4j\pi\nu e^{2j\pi\nu} + 4j\pi\nu e^{-2j\pi\nu}$

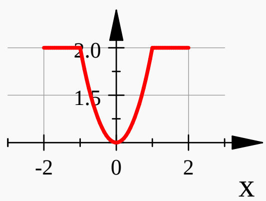
$\quad = 4j(-\sin 2\pi\nu + 2\pi\nu\cos 2\pi\nu)$

$$\mathcal{F}(T) = (2j\pi\nu)^{-3}\mathcal{F}(T''') = \frac{\sin 2\pi\nu - 2\pi\nu\cos 2\pi\nu}{2\pi^3\nu^3}$$

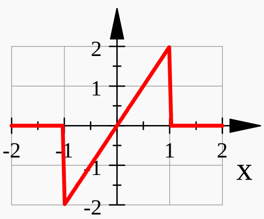
4. $f(x) = \begin{cases} 2 & si \quad -2 < x \leq -1 \\ 1 + x^2 & si \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & si \quad 1 \leq x < 2 \end{cases}$

Voici un tableau donnant les valeurs de $f(x)$, $f'(x)$ et $f''(x)$ et ses graphes

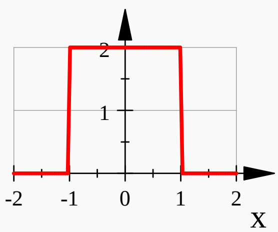
| $x$ | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ |
|---|---|---|---|
| $-2 < x < -1$ | $2$ | $0$ | $0$ |
| $-1 < x < 1$ | $1 + x^2$ | $2x$ | $2$ |
| $1 < x < 2$ | $2$ | $0$ | $0$ |
| Ailleurs | $0$ | $0$ | $0$ |




$f(x)$




$f'(x)$




$f''(x)$

$f(x)$ a deux points de discontinuité : $x_1 = -2, x_2 = 2$

$\Delta f(-2) = 2 - 0 = 2$ , $\Delta f(2) = 0 - 2 = -2$

$f'(x) = \begin{cases} 2x & si \quad -1 < x < 1 \\ 0 & si \quad non \end{cases} = 2xP_2(x) = 2x(u(x+1) - u(x-1))$

où $P_2(x)$ est le signal porte sur$]-1,1[$

On a donc :

$$[f]' = [2xP_2(x)] + 2\delta(x+2) - 2\delta(x-2)$$

$$\begin{aligned}[f]'' &= [2xP_2(x)]' + 2\delta'(x+2) - 2\delta'(x-2)\\ &= [2x(u(x+1)-u(x-1))]' + 2\delta'(x+2) - 2\delta'(x-2)\\ &= [2P_2(x)] + 2x\{\delta(x+1)-\delta(x-1)\} + 2\delta'(x+2) - 2\delta'(x-2)\\ &= [2P_2(x)] - 2\delta(x+1) - 2\delta(x-1) + 2\delta'(x+2) - 2\delta'(x-2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[f]''' &= [2P_2(x)]' - 2\delta'(x+1) - 2\delta'(x-1) + 2\delta''(x+2) - 2\delta''(x-2)\\ &= 2\delta(x+1) - 2\delta(x-1) - 2\delta'(x+1) - 2\delta'(x-1) + 2\delta''(x+2) - 2\delta''(x-2)\end{aligned}$$

On a :

$\mathcal{F}(\delta(x-a)) = \exp(-2j\pi\nu a)$ et $\mathcal{F}\left(\delta^{(n)}(x-a)\right) = (2j\pi\nu)^n \exp(-2j\pi\nu a)$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}([f]''') &= 2\left(e^{2j\pi\nu} - e^{-2j\pi\nu}\right) - 2j\pi\nu\left(e^{2j\pi\nu} + e^{-2j\pi\nu}\right) + 2(2j\pi\nu)^2\left(e^{2j\pi\nu} - e^{-2j\pi\nu}\right)\\ &= 4j\sin(2\pi\nu) - 4j\pi\nu\cos(2\pi\nu) - 16j\pi^2\nu^2\sin(2\pi\nu)\end{aligned}$$

D'autre part :

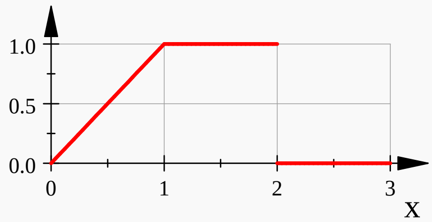
$$\mathcal{F}([f]''') = (2j\pi\nu)^3 \mathcal{F}(T)$$

$$\Longrightarrow \mathcal{F}(f) = \frac{4j\sin(2\pi\nu) - 4j\pi\nu\cos(2\pi\nu) - 16j\pi^2\nu^2\sin(2\pi\nu)}{-8j\pi^3\nu^3}$$

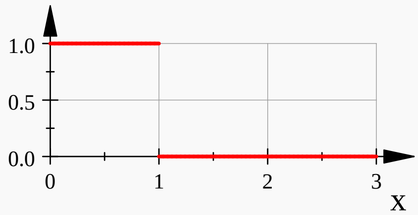
Ou bien :

$$\mathcal{F}(f) = \frac{-\sin(2\pi\nu) + \pi\nu\cos(2\pi\nu) + 2\pi^2\nu^2\sin(2\pi\nu)}{2\pi^3\nu^3}$$

5. $f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \le x \le 1 \\ 1 & si \quad 1 \le x < 2 \\ 0 & si \quad non \end{cases}$ , $f'(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 < x < 1 \\ 0 & si \quad 1 < x < 2 \\ 0 & si \quad non \end{cases} = P_{(0,1)}(x) \Longrightarrow f''(x) = 0$




$f(x)$




$f'(x)$

$\Delta f(2) = 0 - 1 = -1$

$$[f]' = \left[P_{(0,1)}(x)\right] - \delta(x-2)$$

$$[f]'' = [u(x) - u(x-1)]' - \delta'(x-2) = \delta(x) - \delta(x-1) - \delta'(x-2)$$

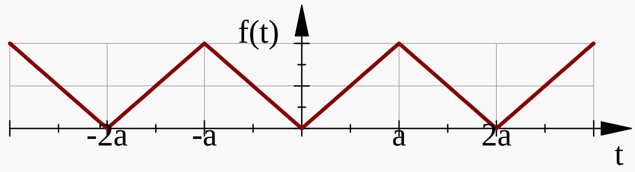
$$\begin{aligned}\mathcal{F}([f]'') &= \mathcal{F}(\delta(x) - \delta(x-1) - \delta'(x-2))\\ &= 1 - \exp(-2j\pi\nu) - (2j\pi\nu)\exp(-4j\pi\nu) = (2j\pi\nu)^2\mathcal{F}(f)\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1 - \exp(-2j\pi\nu) - (2j\pi\nu)\exp(-4j\pi\nu)}{-4\pi^2\nu^2}$$

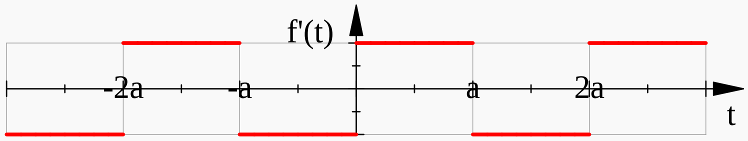
**Exercice 3** Soit la fonction $f(t)$ périodique de période $2a$, définie pour $|t| \leq a$ par $f(t) = |t|$.

1. Calculer $[f]''$
2. Calculer les transformées de Fourier de $[f]''$ puis $[f]$
3. En déduire le développement en série de Fourier de $f$.

## SOLUTION 3




1. $f(t)$ est continue $\forall t$ alors $[f]' = [f'] = \begin{cases} 1 & si \quad t < a \\ -1 & si \quad t > -a \end{cases} = sgn(t)$ pour $0 < |t| < a$




Au sens des fonctions $f'' = 0 \Longrightarrow [f''] = 0$
Les points de discontinuité de $f'$ sont $a_k$ ; $k \in \mathbb{Z}$
aux points : $0, \pm 2a, \pm 4a, ...2ka$ : $\Delta f' = 2$
aux point : $\pm a, \pm 3a, \pm 5a, ...(2k+1)a$ $\Delta f' = -2$
ce qui donne :

$$[f]'' = \sum_{k\in\mathbb{Z}} [2\delta(t-2ka) - 2\delta(t-(2k+1)a)]$$

d'après la définition du produit de convolution on a : $\delta(t-a) * \delta(t-b) = \delta(t-(a+b))$
$\Longrightarrow \delta(t-(2k+1)a) = \delta(t-a) * \delta(t-2ka)$ et $\delta(t) * \delta(t-2ka) = \delta(t-2ka)$
alors :
$[f]'' = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \{\delta(t-2ka) * \delta - \delta(t-2ka) * \delta_a\} = 2(\delta - \delta_a) * \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-2ka)$

2. On a $\mathcal{F}(\delta) = 1$ et $\mathcal{F}(\delta_a) = \exp(-j\omega a)$ ; $\omega = 2\pi\nu$ et $\mathcal{F}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-2ka)\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp(-2jk\omega a)$
D'après la formule de Poisson :

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} \exp(2j\pi p\theta t) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\theta}\delta\left(t - \frac{p}{\theta}\right)$$

on peut écrire : $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp(-2jk\omega a) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp(-4jk\pi\nu a) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2a}\delta\left(\nu - \frac{k}{2a}\right)$
D'autre part :
$\mathcal{F}([f]'') = 2\mathcal{F}(\delta - \delta_a) \times \mathcal{F}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-2ka)\right) = 2\left(1 - e^{-2j\pi\nu a}\right)\frac{1}{2a}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(\nu - \frac{k}{2a}\right)$

Alors :

$$\mathcal{F}\left([f]''\right) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-2j\pi\nu a}\right)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta\left(\nu - \frac{k}{2a}\right)$$

$\mathcal{F}\left([f]''\right) = (2j\pi\nu)^2\,\mathcal{F}(f) = -4\pi^2\nu^2 F(\nu) \Longrightarrow$

$$F(\nu) = -\frac{1 - e^{-2j\pi\nu a}}{4\pi^2\nu^2 a}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta\left(\nu - \frac{k}{2a}\right)$$

**Exercice 4** On considère la fonction $f_0$ définie par

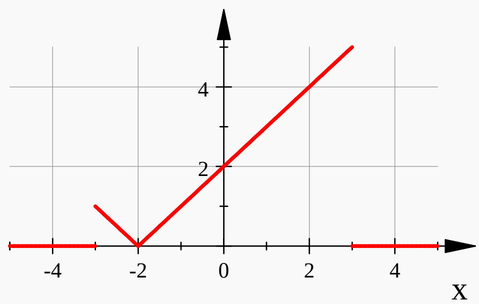
$$f_0(x) = \begin{cases} |2+x| & si \quad -3 < x \leq 3 \\ 0 & si \quad non \end{cases}$$

1. Déterminer $[f_0]'$ et $[f_0]''$
2. Déterminer la transformée de Fourier de de $f_0$
3. Soit $f$ une fonction périodique de période $T = 6$, égale à $f_0$ sur $[-3, 3]$. Déterminer le développement en série de Fourier de $f$.

SOLUTION 4

$$f_0(x) = \begin{cases} -(2+x) & si \quad -3 < x \leq -2 \\ 2+x & si \quad -2 < x < 3 \\ 0 & si \quad |x| > 3 \end{cases}$$

Le graphe :




$f_0(x)$

1. $f_0(x)$ s'exprime en fonction de l'échelon unité :
   $f_0(x) = -(2+x)(u_{-3} - u_{-2}) + (2+x)(u_{-2} - u_3)$
   $= (2+x)(-u_{-3} + 2u_{-2} - u_3)$
   $[f_0] = (2+x)[-u_{-3} + 2u_{-2} - u_3]$
   $[f_0]' = [-u_{-3} + 2u_{-2} - u_3] + (2+x)\left(-[u_{-3}]' + 2[u_{-2}]' - [u_3]'\right)$
   $= [-u_{-3} + 2u_{-2} - u_3] + (2+x)(-\delta_{-3} + 2\delta_{-2} - \delta_3)$
   $= [-u_{-3} + 2u_{-2} - u_3] - (2+x)\,\delta_{-3} + 2(2+x)\,\delta_{-2} - (2+x)\,\delta_3$
   $(2+x)(\delta_{-3}) = (2-3)\,\delta_{-3} = -\delta_{-3}$
   $(2+x)(\delta_{-2}) = (2-2)(\delta_{-2}) = 0$
   $(2+x)(\delta_3) = (2+3)(\delta_3) = 5\delta_3$
   $$[f_0]' = [-u_{-3} + 2u_{-2} - u_3] + \delta_{-3} - 5\delta_3$$

$$[f_0]'' = [-u_{-3} + 2u_{-2} - u_3]' + \delta'_{-3} - 5\delta'_3$$
$$= -[u_{-3}]' + 2[u_{-2}]' - [u_3]' + \delta'_{-3} - 5\delta'_3$$
$$= -\delta_{-3} + 2\delta_{-2} - \delta_3 + \delta'_{-3} - 5\delta'_3$$

2. $\mathcal{F}([f_0]'') = \mathcal{F}(-\delta_{-3} + 2\delta_{-2} - \delta_3 + \delta'_{-3} - 5\delta'_3)$

$\mathcal{F}(\delta_a) = e^{-2j\pi\nu a}$ et $\mathcal{F}\left(\delta_a^{(n)}\right) = (2j\pi\nu)^n e^{-2j\pi\nu a}$

$\mathcal{F}([f_0]'') = -e^{6j\pi\nu} + 2e^{4j\pi\nu} - e^{-6j\pi\nu} + 2j\pi\nu e^{6j\pi\nu} - 10j\pi\nu e^{-6j\pi\nu}$

$= -e^{6j\pi\nu} - e^{-6j\pi\nu} + 2e^{4j\pi\nu} + 2j\pi\nu\left(e^{6j\pi\nu} - e^{-6j\pi\nu}\right) - 8j\pi\nu e^{-6j\pi\nu}$

$= -2\cos 6\pi\nu - 4\pi\nu\sin 6\pi\nu + 2e^{4j\pi\nu} - 8j\pi\nu e^{-6j\pi\nu}$

$\mathcal{F}([f]'') = (2j\pi\nu)^2\mathcal{F}(f) = -4\pi^2\nu^2 F(\nu)$

$$F(\nu) = \frac{2\cos 6\pi\nu + 4\pi\nu\sin 6\pi\nu - 2\exp(4j\pi\nu) + 8j\pi\nu\exp(-6j\pi\nu)}{4\pi^2\nu^2}$$

3. $C_n = \frac{1}{T}F\left(\frac{n}{T}\right) = \frac{1}{6}F\left(\frac{n}{6}\right)$

$C_n = \left.\frac{2\cos 6\pi\nu + 4\pi\nu\sin 6\pi\nu - 2\exp(4j\pi\nu) + 8j\pi\nu\exp(-6j\pi\nu)}{24\pi^2\nu^2}\right|_{\nu=n/6}$

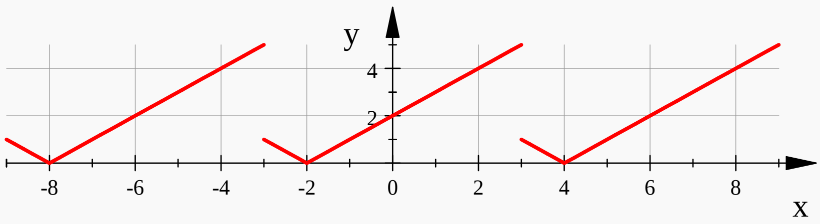
$= 36\frac{2\cos n\pi + (2n\pi/3)\sin n\pi - 2\exp(2jn\pi/3) + (4jn\pi/3)\exp(-jn\pi)}{24\pi^2 n^2}$

$= \frac{3}{2}\frac{2(-1)^n - 2\exp(2jn\pi/3) + (4jn\pi/3)(-1)^n}{\pi^2 n^2}$

$= 3\left(\frac{(-1)^n - \cos 2n\pi/3}{\pi^2 n^2}\right) + j\left(\frac{2n\pi(-1)^n - 3\sin(2n\pi/3)}{\pi^2 n^2}\right)$

$a_0 = C_0 = \frac{1}{6}\left(-\int_{-3}^{-2}(2+x)\,dx + \int_{-2}^{3}(2+x)\,dx\right) = \frac{13}{6}$

$$S(t) = \frac{13}{6} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(3\left(\frac{(-1)^n - \cos(2n\pi/3)}{\pi^2 n^2}\right)\cos\frac{n\pi x}{3} - \left(\frac{2n\pi(-1)^n - 3\sin(2n\pi/3)}{\pi^2 n^2}\right)\sin\frac{n\pi x}{3}\right)$$




$g(x)$

**Exercice 5** On considère la fonction $f$ définie par

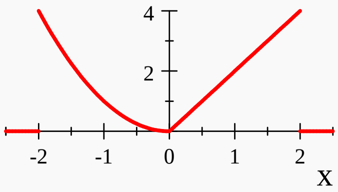
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad -2 < x \leq 0 \\ 2x & si \quad 0 \leq x < 2 \end{cases} \quad \text{et nulle ailleurs}$$

1. Déterminer $[f]$, $[f]''$ et $[f]'''$
2. Déterminer la transformée de Fourier de $f$
3. Soit $g(x)$ une fonction périodique de période $T = 4$, égale à $f(x)$ sur $[-2, 2]$. Déterminer le développement en série de Fourier de $g$.

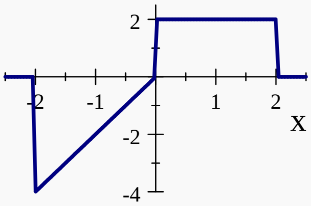
## SOLUTION 5

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\in\,]-2,0[\\ 2x & \text{si } x\in\,]0,2[\\ 0 & \text{si } \ |x|>2\end{cases},\ f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x\in\,]-2,0[\\ 2 & \text{si } x\in\,]0,2[\\ 0 & \text{si } \ |x|>2\end{cases},\ f''_0(x)\begin{cases} 2 & \text{si } x\in\,]-2,0[\\ 0 & \text{si } x\in\,]0,2[\\ 0 & \text{si } \ |x|>2\end{cases}$$

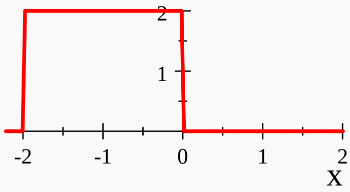
**Graphes :**



$f(x)$



$f'(x)$



$f''(x)$

1. La fonction $f(x)$ est continue sauf aux points $a_1=-2$ et $a_2=2$ où elle admet des points de discontinuité de première espèce :
   $\Delta f(-2)=f(-2^+)-f(-2^-)=4-0=4$, $\Delta f(2)=f(2^+)-f(2^-)=0-4=-4$
   Alors $[f]'=[f']+4\delta_{-2}-4\delta_2$
   $f'(x)$ a trois points de discontinuité
   $x_1=-2:\Delta f'(-2)=-4-0=-4,$
   $x_2=0:\Delta f'(0)=2-0=2,$
   $x_3=2:\Delta f'(2)=0-2=-2$
   $[f']'=[f'']-4\delta_{-2}+2\delta_0-2\delta_2$
   $[f]''=[f'']-4\delta_{-2}+2\delta_0-2\delta_2+4\delta'_{-2}-4\delta'_2$
   $f'''=0$
   $f''(x)$ a 2 points de discontinuité
   $x_1=-2:\Delta f''(-2)=2-0=2$
   $x_2=0:\Delta f''(0)=0-2=-2$
   $[f'']'=[f''']+2\delta_{-2}-2\delta_0$
   $[f]'''=2\delta_{-2}-2\delta_0-4\delta'_{-2}+2\delta'_0-2\delta'_2+4\delta''_{-2}-4\delta''_2$
2. $\mathcal{F}[f]'''=\mathcal{F}\left[2\delta_{-2}-2\delta_0-4\delta'_{-2}+2\delta'_0-2\delta'_2+4\delta''_{-2}-4\delta''_2\right]$
   On a : $\mathcal{F}\left(\delta_a^{(k)}\right)=(2j\pi\nu)^k e^{-2j\pi\nu a}$ donc
   $\mathcal{F}[f]''' = 2e^{4j\pi\nu}-2-4(2j\pi\nu)e^{4j\pi\nu}+2(2j\pi\nu)-2(2j\pi\nu)e^{-4j\pi\nu}+4(2j\pi\nu)^2e^{4j\pi\nu}-4(2j\pi\nu)^2e^{-4j\pi\nu}$
   $=2e^{4j\pi\nu}-2-8j\pi\nu e^{4j\pi\nu}+4j\pi\nu-4j\pi\nu e^{-4j\pi\nu}-16\pi^2\nu^2e^{4j\pi\nu}+16\pi^2\nu^2e^{-4j\pi\nu}$
   $=2(1-2j\pi\nu)e^{4j\pi\nu}-2(1-2j\pi\nu)+4j\pi\nu\left(-e^{4j\pi\nu}-e^{-4j\pi\nu}\right)-16\pi^2\nu^2\left(e^{4j\pi\nu}-e^{-4j\pi\nu}\right)$
   $=2(1-2j\pi\nu)e^{4j\pi\nu}-2(1-2j\pi\nu)-8j\pi\nu(\cos 4\pi\nu)-32j\pi^2\nu^2(\sin 4\pi\nu)$
   $F(\nu)=\dfrac{1}{(2j\pi\nu)^3}\mathcal{F}\left([f_0]'''\right)$
   $$F(\nu)=j\frac{\left(2(1-2j\pi\nu)e^{4j\pi\nu}-2(1-2j\pi\nu)-8j\pi\nu\cos 4\pi\nu-32j\pi^2\nu^2\sin 4\pi\nu\right)}{8\pi^3\nu^3}$$
3. $g(x)$ est continue les coefficients de Fourier se déterminent par :
   $C_n=\dfrac{1}{T}F\left(\dfrac{n}{T}\right)=\dfrac{1}{4}F\left(\dfrac{n}{4}\right)$
   $C_n=\dfrac{j}{4}\left.\dfrac{\left(2(1-2j\pi\nu)e^{4j\pi\nu}-2(1-2j\pi\nu)-8j\pi\nu\cos 4\pi\nu-32j\pi^2\nu^2\sin 4\pi\nu\right)}{8\pi^3\nu^3}\right|_{\nu=\frac{n}{4}}$

$$= -\frac{2j}{\pi^3 n^3}\left(2e^{j\pi n}\left(\tfrac{1}{2}j\pi n - 1\right) - j\pi n + 2j\pi^2 n^2 \sin \pi n + 2j\pi n \cos \pi n + 2\right)$$

$\sin n\pi = 0$ et $\cos n\pi = e^{j\pi n} = (-1)^n$

$$\Longrightarrow C_n = \frac{1}{\pi^3 n^3}\left(4j(-1)^n - 4j - 2\pi n + 6(-1)^n \pi n\right) = \frac{4j}{\pi^3 n^3}\left((-1)^n - 1\right) + 2\frac{3(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2}$$

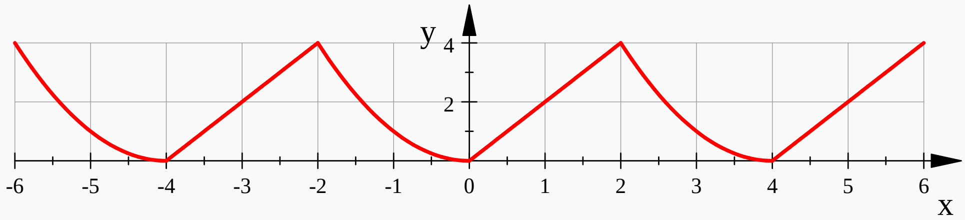
$$a_n = 2\,\mathrm{Re}\, C_n = 4\frac{3(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2}$$

$$b_n = -2\,\mathrm{Im}\, C_n = -\frac{8}{\pi^3 n^3}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$a_0 = C_0 = \frac{1}{4}\left(\int_{-2}^{0} x^2 dx + \int_{0}^{2} 2x dx\right) = \frac{5}{3}$$

$$T = 4 \Longrightarrow \omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$$

$$S(t) = \frac{5}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(4\frac{3(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2}\cos\frac{n\pi x}{2} - \frac{8\left((-1)^n - 1\right)}{\pi^3 n^3}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)$$




Graphe de $g(x)$

<u>Autre méthode</u>

On exprime $f(x)$ à l'aide de la fonction échelon unité : $u_a = u(x-a)$

Alors :

$$f(x) = x^2(u_{-2} - u_0) + 2x(u_0 - u_2) = x^2 u_{-2} - \left(x^2 - 2x\right)u_0 - 2xu_2$$

$$[f] = x^2[u_{-2}] - \left(x^2 - 2x\right)[u_0] - 2x[u_2]$$

$$[f]' = 2x[u_{-2}] + x^2[u_{-2}]' - (2x-2)[u_0] - \left(x^2 - 2x\right)[u_0]' - 2[u_2] - 2x[u_2]'$$

$$= 2x[u_{-2}] + x^2\delta_{-2} - (2x-2)[u_0] - \left(x^2 - 2x\right)\delta_0 - 2[u_2] - 2x\delta_2$$

$$= 2x[u_{-2}] + 4\delta_{-2} - (2x-2)[u_0] - 2[u_2] - 4\delta_2 \qquad N.B:\ g(x)\delta_a = g(a)\delta_a$$

$$[f]'' = 2[u_{-2}] + 2x[u_{-2}]' + 4\delta'_{-2} - 2[u_0] - (2x-2)[u_0]' - 2[u_2]' - 4\delta'_2$$

$$= 2[u_{-2}] + 2x\delta_{-2} + 4\delta'_{-2} - 2[u_0] - (2x-2)\delta_0 - 2\delta_2 - 4\delta'_2$$

$$= 2[u_{-2}] - 4\delta_{-2} + 4\delta'_{-2} - 2[u_0] + 2\delta_0 - 2\delta_2 - 4\delta'_2$$

$$[f]''' = 2\delta_{-2} - 4\delta'_{-2} + 4\delta''_{-2} - 2\delta_0 + 2\delta'_0 - 2\delta'_2 - 4\delta''_2$$

$$= 2\delta_{-2} - 2\delta_0 - 4\delta'_{-2} + 2\delta'_0 - 2\delta'_2 + 4\delta''_{-2} - 4\delta''_2$$

$$\mathcal{F}\left([f]'''\right) = 2e^{4j\pi\nu} - 2 - 4(2j\pi\nu)e^{4j\pi\nu} + 2(2j\pi\nu) - 2(2j\pi\nu)e^{-4j\pi\nu} + 4(2j\pi\nu)^2 e^{4j\pi\nu} - 4(2j\pi\nu)^2 e^{-4j\pi\nu}$$

$$= 2e^{4j\pi\nu} - 2 - 8j\pi\nu e^{4j\pi\nu} + 4j\pi\nu - 4j\pi\nu e^{-4j\pi\nu} - 16\pi^2\nu^2 e^{4j\pi\nu} + 16\pi^2\nu^2 e^{-4j\pi\nu}$$

$$= 2(1 - 2j\pi\nu)e^{4j\pi\nu} - 2(1 - 2j\pi\nu) + 4j\pi\nu\left(-e^{4j\pi\nu} - e^{-4j\pi\nu}\right) - 16\pi^2\nu^2\left(e^{4j\pi\nu} - e^{-4j\pi\nu}\right)$$

$$= 2(1 - 2j\pi\nu)e^{4j\pi\nu} - 2(1 - 2j\pi\nu) - 8j\pi\nu(\cos 4\pi\nu) - 32j\pi^2\nu^2(\sin 4\pi\nu)$$

On obtient la même résultat :

$$F(\nu) = j\frac{\left(2(1 - 2j\pi\nu)e^{4j\pi\nu} - 2(1 - 2j\pi\nu) - 8j\pi\nu\cos 4\pi\nu - 32j\pi^2\nu^2\sin 4\pi\nu\right)}{8\pi^3\nu^3}$$

**Remarque 1** On peut vérifier les résultats précédents par calcul des coéfficients de Fourier :

$$T = 4 \Longrightarrow \omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$$

$$C_n = \frac{1}{4}\left(\int_{-2}^{0} x^2 \exp\left(-j\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \int_{0}^{2} 2x \exp\left(-j\frac{n\pi x}{2}\right) dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi^3 n^3}\left(4j\left((-1)^n - 1\right) + 6\left(-1\right)^n \pi n - 2\pi n\right)$$

$$a_n = \frac{2}{4}\left(\int_{-2}^{0} x^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \int_{0}^{2} 2x \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx\right) = \frac{4}{\pi^2 n^2}\left(3\left(-1\right)^n - 1\right)$$

$$b_n = \frac{2}{4}\left(\int_{-2}^{0} x^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \int_{0}^{2} 2x \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx\right) = -\frac{8}{\pi^3 n^3}\left(\left(-1\right)^n - 1\right)$$

$$a_0 = C_0 = \frac{1}{4}\left(\int_{-2}^{0} x^2 dx + \int_{0}^{2} 2x dx\right) = \frac{5}{3}$$