Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Signal déterministe (MAA107)

Introduction à la notion de distribution

Attention

Dans tous les exercices suivants on désignera par :
D : l'ensemble des fonctions tests. $\varphi(t)$: une fonction test.
D' : l'ensemble des distributions. $T(t)$ est une distribution

Exercice 1 Dite si les applications suivantes sont des distributions, et préciser si les distributions sont régulières ou singulières

1. $T_1(\varphi) = \int\limits_0^1 \varphi(t)\,dt$
2. $T_2(\varphi) = \int\limits_{-1}^1 |\varphi(t)|\,dt$
3. $T_3(\varphi) = \sum\limits_{n=0}^N \varphi^{(n)}(k)$
4. $T_4(\varphi) = \int\limits_0^1 \varphi^{(n)}(t)\,dt$
5. $T_5(\varphi) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos t\varphi(t)\,dt$
6. $T_6(\varphi) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\varphi'(t)\,dt$
7. $T_7(\varphi) = \sum\limits_{n=0}^N \varphi^{(n)}(0)$
8. $T_8(\varphi) = \int\limits_0^{+\infty} t\varphi(t)\,dt$
9. $T_9(\varphi) = \int\limits_{-1}^1 \varphi(t+\alpha)\,dt$
10. $T_{10}(\varphi) = \varphi(2) - \varphi(0)$

SOLUTION 1

Pour démontrer que T est une distribution il suffit de vérifier que :
(i) T est définie pour toute fonction test $\varphi(t)$,
(ii) T est linéaire : $T(a\varphi_1 + b\varphi_2) = aT(\varphi_1) + bT(\varphi_2)$,
(iii) T est continue : $T(\varphi_n) \underset{n\to\infty}{\to} T(\varphi)$ si $\varphi_n \underset{n\to\infty}{\to} \varphi$.
T est une distribution régulière s'il existe une fonction $f(t)$ sommable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$T(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt.$$

1. $T_1(\varphi) = \int\limits_0^1 \varphi(t)\,dt$

   (i) $T_1(\varphi)$ est définie sur toute segment, car $\varphi(t)$ est une fonction test continue sur n'importe quel segment, et en particulier sur $[0,1]$ donc l'intégrale est définie $\forall\varphi \in D$;

   (ii) $T(a\varphi_1 + b\varphi_2) = \int\limits_0^1 [a\varphi_1(t) + b\varphi_2(t)]\,dt$

   $= a\int\limits_0^1 \varphi_1(t)\,dt + b\int\limits_0^1 \varphi_2(t)\,dt = aT(\varphi_1) + bT(\varphi_2)$

   donc T est linéaire

(iii) soit $\varphi_n \underset{n\to\infty}{\to} \varphi$. $T(\varphi_n) = \int\limits_0^1 \varphi_n(t)\,dt \underset{n\to\infty}{\to} \int\limits_0^1 \varphi(t)\,dt = T(\varphi)$

par suite T est une distribution.

La fonction $f(t) = 1$ pour $0 \leq t \leq 1$ et nulle ailleurs est une fonction sommable sur $\mathbb{R}$ donc T_1 est une distribution régulière.

2. $T_2(\varphi) = \int\limits_0^1 |\varphi(t)|\,dt$ si $\varphi(t)$ est définie alors $|\varphi(t)|$ est aussi définie donc $T_2(\varphi)$ est définie pour toute φ

$T_2(a\varphi_1 + b\varphi_2) = \int\limits_0^1 |a\varphi_1(t) + b\varphi_2(t)|\,dt$

puisque $|a\varphi_1(t) + b\varphi_2(t)| \leq a|\varphi_1| + b|\varphi_2|$ alors $T_2(a\varphi_1 + b\varphi_2) \leq aT_2(\varphi_1) + bT_2(\varphi_2)$ donc T_2 n'est pas linéaire et par suite ne définie pas une distribution

3. $T_3(\varphi) = \sum\limits_{n=0}^{N} \varphi^{(n)}(k)$

$\varphi(t)$ est une fonction test donc elle en est de même $\varphi^{(n)}(k)$ de plus $\varphi^{(n)}(k) = \delta^{(n)}(k)$ donc c'est une distribuition singulière si N est fini. d'autre part $\sum\limits_{n=0}^{N} \varphi^{(n)}(k)$ n'a pas de sens si N est infini.

4. $T_4(\varphi) = \int\limits_0^1 \varphi^{(n)}(t)\,dt = \left.\varphi^{(n-1)}(t)\right|_0^1$

$= \varphi^{(n-1)}(1) - \varphi^{(n-1)}(0) = \delta^{(n-1)}(t-1) - \delta^{(n-1)}(0)$.

Donc c'est bien une distribution singulière.

5. $T_5(\varphi) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos t\varphi(t)\,dt$

(i) $T_5(\varphi)$ est définie sur tout segment, car $\varphi(t)$ est une fonction test continue sur n'importe quel segment, et en particulier sur $[-\pi, \pi]$ donc l'intégrale est définie $\forall \varphi \in D$;

(ii) $T_5(a\varphi_1 + b\varphi_2) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} [a\varphi_1(t) + b\varphi_2(t)] \cos t dt$

$= a\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\,\varphi_1(t)\,dt + b\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\,\varphi_2(t)\,dt = aT_5(\varphi_1) + bT_5(\varphi_2)$

donc T_5 est linéaire

(iii) soit $\varphi_n \underset{n\to\infty}{\to} \varphi$. $T_5(\varphi_n) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\,\varphi_n(t)\,dt \underset{n\to\infty}{\to} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\,\varphi(t)\,dt = T_5(\varphi)$

par suite T est une distribution.

La fonction $f(t) = P_{[-\pi,\pi]} \cos t$ est une fonction sommable sur $\mathbb{R}$ donc T_5 est une distribution régulière.

6. $T_6(\varphi) = \int\limits_0^{\infty} e^{-t}\varphi'(t)\,dt$

Intégrons par parties : $(u = e^{-t}$ et $dv = \varphi'(t)\,dt)$ on obtient :

$T_6(\varphi) = \int\limits_0^{\infty} e^{-t}\varphi'(t)\,dt = \left.e^{-t}\varphi(t)\right|_0^{\infty} + \int\limits_0^{\infty} e^{-t}\varphi(t)\,dt = -\varphi(0) + \int\limits_0^{\infty} e^{-t}\varphi(t)\,dt$

l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-t}\varphi(t)\,dt$ définie une distribution réglière associée à $f(t) = e^{-t}u(t)$; $u(t)$ est l'échelon unité. mais $\varphi(0) = \delta(t)$ donc $T_6(\varphi) = -\delta(t) + \left[e^{-t}u(t)\right]$ c'est la somme d'une distribution régulière et une distribution singulière.
T_6 est une distribution singulière.

7. $T_7(\varphi) = \sum_{n=0}^{N} \varphi^{(n)}(0)$ Même cas que T_3. avec $k = 0$
   Si N est infini T n'est pas définie pour toute fonction φ,
   en particulier si $\varphi(t) = e^t$ sur $[a, b]$ alor $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(n)}(0) = 1$ et $T = 1^{\infty}$
   donc $T_7(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(0)$ n'est pas une distribution.
8. Il est evident que $T_8(\varphi)$ est continue et linéaire et elle définie une distribution régulière associée à la fonction $f(t) = tu(t)$
9. $T_9(\varphi) = \int_{-1}^{1} \varphi(t+\alpha)\,dt$

   Posons $x = t + \alpha$ alors $dx = dt$ si $t = \pm 1$ alor $x = \alpha \pm 1$ et donc $T_9(\varphi) = \int_{\alpha-1}^{\alpha+1} \varphi(x)\,dx$

   $T_9(\varphi)$ est donc une distribution régulière associée à la fonction $P_{[\alpha-1,\alpha+1]}$
10. $T_{10}(\varphi) = \varphi(2) - \varphi(0) = \delta(t-2) - \delta(t)$ $\Rightarrow T_{10}$ est distribution singulière.

Exercice 2 Soit $T = a\delta'(t) + b\delta(t-1)$ .Calculer les produits suivants :

1. $tT(t)$
2. $t^2T(t)$
3. $(t-1)T(t)$
4. $t(t-1)T(t)$
5. $t^2(t-1)T(t)$

SOLUTION 2

$T = a\delta'(t) + b\delta(t-2)$

1. $tT = t\left(a\delta'(t) + b\delta(t-2)\right) = at\delta'(t) + bt\delta(t-2)$
   $= a\left\langle t\delta'(t), \varphi(t)\right\rangle + b\left\langle t\delta(t-1), \varphi(t)\right\rangle = a\left\langle \delta'(t), t\varphi(t)\right\rangle + b\left\langle \delta(t-1), t\varphi(t)\right\rangle$
   $= -a\left\langle \delta(t), (t\varphi)'\right\rangle + b\left\langle \delta(t-1), (t)\varphi(t)\right\rangle$
   $= -a\left\langle \delta(t), t\varphi' + \varphi\right\rangle + b\left\langle \delta(t+1), (t)\varphi(t)\right\rangle$
   $= -a\left[t\varphi' + \varphi\right]_{t=0} + b\left[t\varphi\right]_{1=1} = -a\varphi(0) + b\varphi(1) = -a\delta(t) + b\delta(t-1)$
2. $t^2T = t(tT) = t(-a\delta(t) + b\delta(t-1)) = -a\, t\varphi(t)|_{t=0} + b\, t\varphi(t)|_{t=1} = b\varphi(1) = b\delta(t-1)$
3. $(t-1)T = tT - T = -a\delta(t) + b\delta(t-1) - a\delta'(t) - b\delta(t-a) = -a\left(\delta + \delta'\right)$
4. $t(t-1)T = t^2T - tT = b\delta(t-1) - \left[-a\delta(t) + b\delta(t-1)\right] = a\delta(t)$
5. $t^2(t-1)T = t^3T - t^2T = t(b\delta(t-1)) - b\delta(t-1)$
   $= b\, t\varphi(t)|_{t=1} - b\delta(t-1) = b\delta(t-1) - b\delta(t-1) = 0$

Exercice 3 Simplifier :

1. $(\sin \pi t)\, \delta_1$
2. $\left(\sin \frac{\pi t}{4}\right) \delta_1$
3. $\left(\frac{\sin \pi t}{t}\right) \delta_0$

SOLUTION 3

1. $(\sin \pi t)\, \delta (t-1) = \langle \sin \pi t \delta (t-1), \varphi (t) \rangle = \langle \delta (t-1), \varphi (t) \sin \pi t \rangle$
   $= [\varphi (t) \sin \pi t]_{t=1} = \varphi (1) \sin \pi = 0$
2. $\left(\sin \frac{\pi t}{4}\right) \delta (t-1) = \left[\varphi (t) \sin \frac{\pi t}{4}\right]_{t=1} = \varphi (1) \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \varphi (1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \delta (t-1)$
3. $\frac{\sin \pi t}{t} \delta (t) = \pi \frac{\sin \pi t}{\pi t} \delta (t) = \lim_{t \to 0} \left[\pi \frac{\sin \pi t}{\pi t} \varphi (t)\right] = \pi \varphi (0) = \pi \delta (t)$

Exercice 4 Montrer que l'application

$$T(\varphi) = \int_{-1}^{1} (1 - |t|)\, \varphi (t)\, dt + \int_{1}^{+\infty} \ln |t|\, \varphi (t)\, dt$$

est une distribution régulière.

SOLUTION 4

On peut vérifier aisement que T est linéaire et continue donc elle définie une distribution.
Posons $f(t) = (1 - |t|)\, P_{(-1,1)}$ et $g(t) = \ln (t)\, u(t-1)$ ces deux fonctions sont définie et sommable sur tout intervalle $[A, B]$ où $\varphi (t)$ est non nulle
alors $T = [f] + [g]$ est une distribution régulière.

Exercice 5 Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$ on pose

$$\langle T, \varphi \rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-x^2 - y^2\right) \varphi (\sin xy)\, dxdy$$

1. Montrer que T est une distribution
2. Quelle est le support de T

SOLUTION 5

1. La fonction $\exp\left(-x^2 - y^2\right)$ est sommable $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ donc elle definit une distribution
   On vérifie que T est linéaire et continue

2. $\exp\left(-x^2-y^2\right)$ s'annule pour $x, y \to \pm\infty$ si I est le support de φ alors il en est de même pour T

Exercice 6 Calculer les dérivées des distributions suivantes :

1. $T(\varphi) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\varphi(x)\,dx$
2. $T(\varphi) = \int\limits_{-1}^{+1} x^2\varphi(x)\,dx$
3. $T(\varphi) = \int\limits_{-\pi}^{+\pi} |\cos x|\,\varphi(x)\,dx$
4. $T(\varphi) = \int\limits_0^{+\infty} (x-1)\,e^{-x}\varphi(x)\,dx$
5. $T(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\varphi(x)}{1+x^2}dx$
6. $T(\varphi) = \int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}\varphi(x)\,dx$

SOLUTION 6

1. $T(\varphi) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\varphi(x)\,dx$

   $T'(\varphi) = -\langle T, \varphi'\rangle = -\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\varphi'(x)\,dx$

   Intégrations par parties : $u = e^{-x} \Rightarrow du = -e^{-x}dx,\, dv = \varphi'(x)\,dx \Rightarrow v = \varphi(x)$

   $T'(\varphi) = -\left\{ e^{-x}\varphi(x)|_0^{\infty} + \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\varphi(x)\,dx \right\} = \varphi(0) - \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\varphi(x)\,dx$

   $\Rightarrow T' = \delta(t) - T$

   Autre méthode :

   $T = T_f;\, f = e^{-x}u(x) \Rightarrow T = \left[e^{-x}u(x)\right]$

   $\Rightarrow T' = \left[e^{-x}u(x)\right]' = \left[-e^{-x}u(x)\right] + \left[e^{-x}u'(x)\right]$

   $= -\left[e^{-x}u(x)\right] + e^{-x}\delta(x) = -\left[e^{-x}u(x)\right] + \delta(x) = -T + \delta$

2. $T(\varphi) = \int\limits_{-1}^{1} x^2\varphi(x)\,dx$

   $T'(\varphi) = -\langle T, \varphi'\rangle = -\int\limits_{-1}^{1} x^2\varphi'(x)\,dx$

   Intégrations par parties : $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx,\, dv = \varphi'(x)\,dx \Rightarrow v = \varphi(x)$

   $T' = -\left. x^2\varphi(x)\right|_{-1}^{1} + 2\int\limits_{-1}^{1} x\varphi(x)\,dx = -\varphi(1) + \varphi(-1) + 2\int\limits_{-1}^{1} x\varphi(x)\,dx$

   $= \delta(t+1) - \delta(t-1) + 2\int\limits_{-1}^{1} x\varphi(x)\,dx$

   Autre méthode :

   $T = \left[x^2\left(u(x+1) - u(x-1)\right)\right]$

   $\Rightarrow T' = 2\left[x\left(u(x+1) - u(x-1)\right)\right] + \left[x^2\left\{u'(x+1) - u'(x-1)\right\}\right]$

   $= 2\left[x\left(u(x+1) - u(x-1)\right)\right] + x^2\left(\delta(x+1) - \delta(x-1)\right)$

   $= 2\left[x\left(u(x+1) - u(x-1)\right)\right] + \delta(x+1) - \delta(x-1)$

3. $T(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} |\cos x|\, \varphi(x)\, dx$

$T' = -\langle T, \varphi' \rangle = -\int_{-\pi}^{\pi} |\cos x|\, \varphi'(x)\, dx$

$= -\left\{ -\int_{-\pi}^{-\pi/2} \cos x \varphi'(x)\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi/2} \cos x \varphi'(x)\, dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \varphi'(x)\, dx \right\}$

$= \int_{-\pi}^{-\pi/2} \cos x \varphi'(x)\, dx - \int_{\pi/2}^{\pi/2} \cos x \varphi'(x)\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \varphi'(x)\, dx$

L'intégration par parties : $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx,\ \ \varphi'(x)\, dx = dv \Rightarrow v = \varphi(x)$ nous donne :

$T' = \cos x \varphi(x)|_{-\pi}^{-\pi/2} - \int_{-\pi}^{-\pi/2} \sin x \varphi(x)\, dx - \cos x \varphi(x)|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x \varphi(x)\, dx +$
$\cos x \varphi(x)|_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x \varphi(x)\, dx$

$= -\varphi(-\pi) - \int_{-\pi}^{-\pi/2} \sin x \varphi(x)\, dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x \varphi(x)\, dx + \varphi(\pi) - \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x \varphi(x)\, dx$

$= \varphi(\pi) - \varphi(-\pi) + \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \varphi(x)\, dx$

avec $\varepsilon = signe(\cos x) = \begin{cases} +1 & si\ \cos x > 0 \\ -1 & si\ \cos x < 0 \end{cases}$

4. $T(\varphi) = \int_{0}^{\infty} (x-1) \exp(-x)\, \varphi(x)\, dx$

On peut aussi utiliser la méthode suivante :

$T_f = [u(x)(x-1)e^{-x}] \Rightarrow T_f' = u'(x-1)e^{-x} + ue^{-x} - u(x-1)e^{-x}$

$= \delta(x)(x-1)e^{-x} + u(x)[e^{-x} - (x-1)e^{-x}] = \delta(x) + [u(x)(2-x)\exp(-x)]$

5. $T(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{1+x^2} dx \Rightarrow T' = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi'(x)}{1+x^2} dx$

Intégration par parties : $u = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow du = -\frac{2x dx}{(1+x^2)^2}$

$T'(\varphi) = -\left|\frac{\varphi(x)}{1+x^2}\right|_{-\infty}^{\infty} - 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\varphi(x)\, dx}{(1+x^2)^2} = -2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\varphi(x)\, dx}{(1+x^2)^2}$

6. $T = \left[u(x)\, xe^{-x^2}\right] \Rightarrow T' = u'xe^{-x^2} + ue^{-x^2} - 2ux^2e^{-x^2}$

$= \delta(x)\, xe^{-x^2} + ue^{-x^2} - 2ux^2e^{-x^2} = \left[ue^{-x^2} - 2ux^2e^{-x^2}\right] = \left[u(x)\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}\right]$

Exercice 7 Déterminer les limites lorsque h tend vers 0^+ des distributions suivantes :

1. $\frac{\delta(t+h) - \delta(t-h)}{2h}$
2. $\frac{\delta(t+h) - 2\delta(t) + \delta(t-h)}{h^2}$

SOLUTION 7

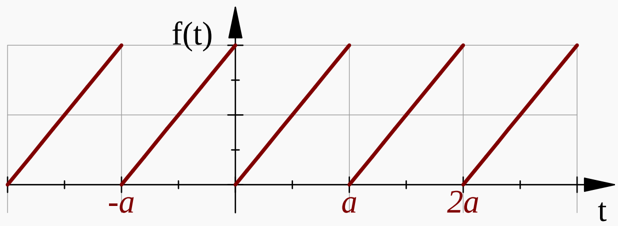
On a $\langle T(t-a), \varphi(t) \rangle = \langle T(t), \varphi(t+a) \rangle$

1. Soit $\varphi(t)$ une fonction test.
$$\left\langle \frac{\delta(t+h)-\delta(t-h)}{2h}, \varphi(t) \right\rangle = \frac{1}{2h}\left\{\langle \delta(t+h), \varphi(t)\rangle - \langle \delta(t-h), \varphi(t)\rangle\right\}$$
$$= \frac{1}{2h}\left\{\langle \delta(t), \varphi(t-h)\rangle - \langle \delta(t), \varphi(t+h)\rangle\right\}$$
$$= \left\langle \delta(t), \frac{\varphi(t-h)-\varphi(t+h)}{2h} \right\rangle = \frac{\varphi(-h)-\varphi(h)}{2h}$$
$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{\varphi(-h)-\varphi(h)}{2h} = -\varphi'(0)$$
$$\Longrightarrow \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{\delta(t+h)-\delta(t-h)}{2h} = \delta'(t)$$
2. $$\left\langle \frac{\delta(t+h)-2\delta(t)+\delta(t-h)}{h^2}, \varphi(t) \right\rangle = \left\langle \delta(t), \frac{\varphi(t-h)-2\varphi(t)+\varphi(t+h)}{h^2} \right\rangle$$
$$= \frac{\varphi(-h)-2\varphi(0)+\varphi(h)}{h^2}$$
La formule de Taylor s'écrit :
$$\varphi(h) = \varphi(0) + h\varphi'(0) + \frac{h^2}{2}\varphi''(\theta h);\ 0<\theta<1$$
$$\varphi(-h) = \varphi(0) - h\varphi'(0) + \frac{h^2}{2}\varphi''(-\theta h)$$
$$\Longrightarrow \frac{\varphi(-h)-2\varphi(0)+\varphi(h)}{h^2} = \frac{\varphi''(\theta h)+\varphi''(-\theta h)}{2} \underset{h\longrightarrow 0}{\longrightarrow} \varphi''(0) = \langle \delta'', \varphi\rangle$$
donc
$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{\delta(t+h)-2\delta(t)+\delta(t-h)}{h^2} = \delta''$$

Exercice 8 Calculer au sens de distribution les dérivées première et seconde de la fonction $a-$ périodique $f(t) = at$ pour $t \in [0, a]$.

SOLUTION 8

Le graphe de $f(t)$ montre qu'elle admet des discontinuité de première espèce aux points $a_k = ka$; $k \in \mathbb{Z}$



$f(t)$

Alors la dérivée de $f(t)$ se détermine, au sens de distribution par la formule :
$$[f]' = [f'] + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Delta f(a_k)\,\delta(t-ka)$$
La dérivée au sens des fonctions de $f(t)$ est $f'(t) = a$ si $0 < t < a$

On a : $\Delta f(a_k) = f(a_k^+) - f(a_k^-) = 0 - a^2 = -a^2$ alors :

$$[f]' = [a] - a^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-ka) = a - a^2 \lfloor | \rfloor$$

Pour calculer $[f]''$ on peut utiliser la formule :

$$[f]'' = [f''] + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Delta f'(a_k)\,\delta(t-ka) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Delta f(a_k)\,\delta'(t-ka)$$

En effet :
On a $[f]' = [f'] + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Delta f(a_k)\,\delta(t-ka)$

$\Longrightarrow [f]'' = \left([f'] + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Delta f(a_k)\,\delta(t-ka)\right)'$

$= [f']' + \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Delta f(a_k)\,\delta(t-ka)\right)' = [f']' + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Delta f(a_k)\,\delta'(t-ka)$

puisque $\Delta f(a_k)$ est une constante
d'autre part, en appliquant la première formule sur $[f']$ on aura :

$$[f']' = [f''] + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Delta f'(a_k)\,\delta(t-ka)$$

dans ce cas on a $f' = a = const. \Longrightarrow f'' = 0$ et $\Delta f'(a_k) = a - a = 0$
donc :

$$[f]'' = -a^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta'(t-ka)$$

Exercice 9 Pour les fonctions f suivantes calculer $[f]'$, $[f]''$ et $[f]'''$:

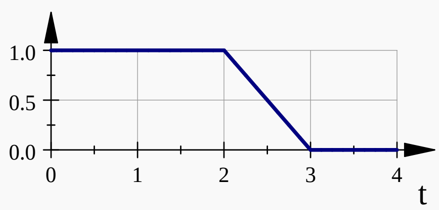
1. $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ 0 < x \le 2 \\ 3-x & si\ 2 \le x \le 3 \\ 0 & si\ non \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ -1 \le x \le 1 \\ 2-x & si\ 2 \le x \le 3 \\ 0 & si\ non \end{cases}$

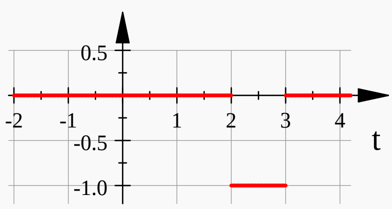
3. $f(x) = \begin{cases} 2+|x| & si\ -1 < x < 1 \\ x^2 & si\ 1 < x < 3 \\ 1 & si\ 3 < x < 4 \\ 0 & si\ non \end{cases}$

SOLUTION 9

1. $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ 0 < x < 2 \\ 3-x & 2 < x < 3 \\ 0 & ailleurs \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -1 & 2 < x < 3 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$



$f(t)$



$f'(t)$

$f(x)$ a le point $x=0$ comme un point de discontinuité de première espèce donc :

$\Delta f(0) = f(0^+) - f(0^-) = 1 - 0 = 1$

$\Rightarrow [f]' = [f'] + \delta(x)$

$f''(x) = 0$

$f'(x)$ a deux points de discontinuité :

$(i)\ \ x = 2 : \Delta f'(2) = f(2^+) - f(2^-) = -1 - 0 = -1$
$(ii)\ \ x = 3 : \Delta f'(3) = f(3^+) - f(3^-) = 0 - (-1) = 1$

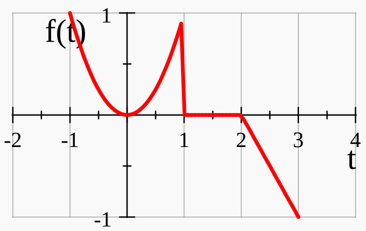
$\Rightarrow [f']' = -\delta(x-2) + \delta(x-3)$

$\Rightarrow [f]'' = -\delta(x-2) + \delta(x-3) + \delta'(x)$

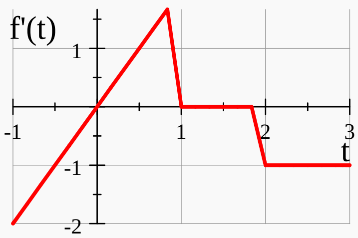
$[f]''' = -\delta'(x-2) + \delta'(x-3) + \delta''(x)$

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 & if \quad -1 < x < 1 \\ 0 & if \quad 1 < x < 2 \\ 2-x & if \quad 2 < x < 3 \end{cases}$

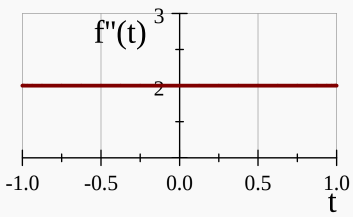
x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
$-1 < x < 1$	x^2	$2x$	2
$2 < x < 3$	$2-x$	-1	0
ailleurs	0	0	0



$f(x)$



$f'(x)$



$f''(x)$

Les points de discontinuité de $f(x)$ sont : $x = -1, +1,$ et $+3$

$\Delta f(-1) = 1 - 0 = 1, \ \ \Delta f(1) = 0 - 1 = 1, \ \ \Delta f(3) = 0 - (-1) = 1$

$[f]' = [f'] + \delta(x+1) - \delta(x-1) + \delta(x-3)$

Les points de discontinuité de $f'(x)$ sont : $x = -1, +1, 2$ et $+3$

$\Delta f'(-1) = -2 - 0 = -2, \ \ \Delta f'(+1) = 0 - 2 = 2, \ \ \Delta f'(2) = -1 - 0 = -1, \ \ \Delta f'(3) = 0 - (-1) = 1$

$\Rightarrow [f']' = [f''] - 2\delta(x+1) - 2\delta(x-1) - \delta(x-2) + \delta(x-3)$

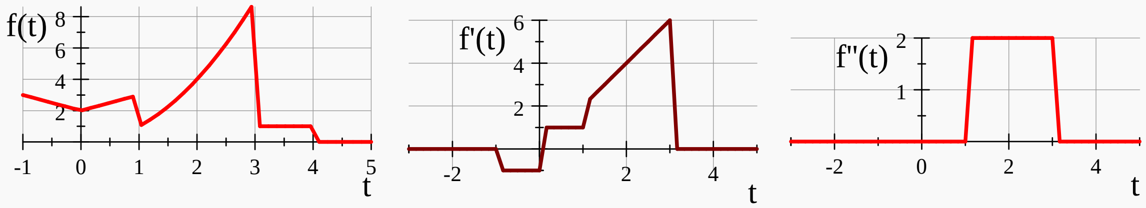
$\Rightarrow [f]'' = [f''] - 2\delta(x+1) - 2\delta(x-1) - \delta(x-2) + \delta(x-3) + \delta'(x+1) - \delta'(x-1) + \delta'(x-3)$

et finalement :

$[f]''' = [f'''] - 2\delta'(x+1) - 2\delta'(x-1) - \delta'(x-2) + \delta'(x-3) + \delta''(x+1) - \delta''(x-1) + \delta''(x-3)$

3. $f(x) = \begin{cases} 2 + |x| & si \ -1 < x < 1 \\ x^2 & si \ 1 < x < 3 \\ 1 & si \ 3 < x < 4 \\ 0 & si \ non \end{cases}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
$-1 < x < 0$	$2-x$	-1	0
$0 < x < 1$	$2+x$	1	0
$1 < x < 3$	x^2	$2x$	2
$3 < x < 4$	1	0	0
ailleurs	0	0	0



$f(x)$ $f'(x)$ $f''(x)$

Les points de discontinuité de $f(x)$: $x = -1, 1, 3, 4$
$\Delta f(-1) = 3$, $\Delta f(1) = -2$, $\Delta f(3) = -8$, $\Delta f(4) = -1$
$\Rightarrow [f'] = [f'] + 3\delta(x+1) - 2\delta(x-1) - 8\delta(x-3) - \delta(x-4)$
Les points de discontinuité de $f'(x)$: $x = -1, 1, 3$
$\Delta f'(-1) = -1$, $\Delta f'(1) = 1$, $\Delta f'(3) = -6$
$[f']' = [f''] - \delta(x+1) + \delta(x-1) - 6\delta(x-3)$
$\Rightarrow [f]'' = [f''] - \delta(x+1) + \delta(x-1) - 6\delta(x-3) + 3\delta'(x+1) - 2\delta'(x-1) - 8\delta'(x-3) - \delta'(x-4)$
$[f]''' = -\delta'(x+1) + \delta'(x-1) - 6\delta'(x-3) + 3\delta''(x+1) - 2\delta''(x-1) - 8\delta''(x-3) - \delta''(x-4)$

Exercice 10 On désigne par $P_{[a,b]}(t)$ la fonction définie par

$$P_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \in [a,b] \\ 0 & si \text{ non} \end{cases}$$

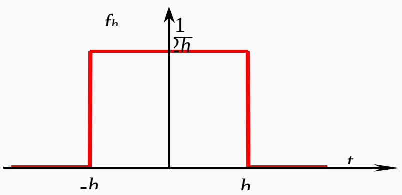
Soient les fonctions localement sommables :

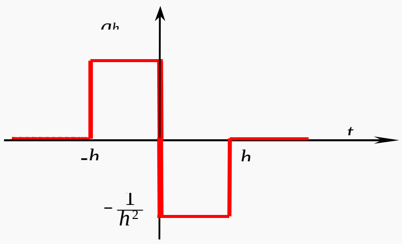
$$f_h(t) = \frac{P_{[-h,h]}(t)}{2h} \quad et \quad g_h(t) = \frac{P_{[-h,0]}(t) - P_{[0,h]}(t)}{h^2}$$

1. Calculer les dérivées des distributions régulières $[f_h]$ et $[g_h]$
2. Calculer $\lim\limits_{h\to0^+} [f_h]$ et $\lim\limits_{h\to0^+} [g_h]$

SOLUTION 10

$$f_h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2h} & t \in [-h,h] \\ 0 & si\ non \end{cases}, \quad g_h(t) = \begin{cases} \frac{1}{h^2} & -h < t < 0 \\ -\frac{1}{h^2} & 0 < t < h \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$





1. D'après le graphe de la fonction $f_h(t)$,elle admet deux points de discontinuité de première espèce : $t=-h$ et $t=h$ dont les sauts d'amplitude sont $\Delta f(-h)$ et $\Delta f(h)$.
   La dérivée de la distribution associée à f est donnée par :
   $[f_h]' = [f_h'] + \Delta f(-h)\,\delta(t+h) + \Delta f(h)\,\delta(t-h)$;
   $\Delta f(-h) = f(-h^+) - f(-h^-) = \dfrac{1}{2h} - 0 = \dfrac{1}{2h}$
   $\Delta f(h) = f(h^+) - f(h^-) = 0 - \dfrac{1}{2h} = -\dfrac{1}{2h}$
   $f_h'(t) = \dfrac{df_h}{dt} = 0 \Longrightarrow [f_h'] = 0$
   d'où : $[f_h]' = \dfrac{\delta(t+h)}{2h} - \dfrac{\delta(t-h)}{2h} = \dfrac{\delta(t+h)-\delta(t-h)}{2h}$
   $g_h(t)$ a trois points de discontinuité : $t=-h,0,h$
   $\Delta g(-h) = g(-h^+) - g(-h^-) = \dfrac{1}{h^2} - 0 = \dfrac{1}{h^2}$
   $\Delta g(h) = g(h^+) - g(h^-) = 0 - \left(-\dfrac{1}{h^2}\right) = \dfrac{1}{h^2}$
   $\Delta g(0) = g(0^+) - g(0^-) = -\dfrac{1}{h^2} - \dfrac{1}{h^2} = -\dfrac{2}{h^2}$
   $g_h' = 0 \Longrightarrow [g_h'] = 0$
   $[g_h]' = [g_h'] + \Delta g(-h)\,\delta(t+h) + \Delta g(0)\,\delta(t) + \Delta g(h)\,\delta(t-h)$
   Alors la dérivée de distribution associée à g_h est :
   $$[g_h]' = \frac{\delta(t+h) - 2\delta(t) + \delta(t-h)}{h^2}$$
2. On a $\lim\limits_{h\to 0}[f_h]' = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\delta(t+h)-\delta(t-h)}{2h} = \delta' \Longrightarrow \lim\limits_{h\to 0}[f_h] = \delta$
   $\lim\limits_{h\to 0}[g_h]' = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\delta(t+h)-2\delta(t)+\delta(t-h)}{h^2} = \delta'' \Longrightarrow \lim\limits_{h\to 0}[g_h] = \delta'$

Exercice 11 Soit la fonction f définie par

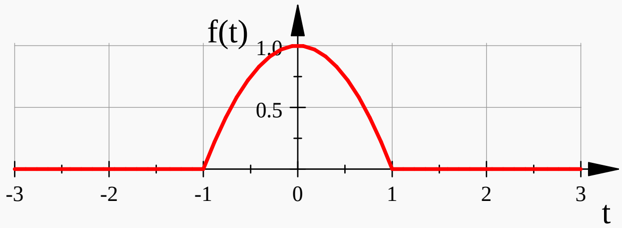
$$f(t) = \begin{cases} 1-t^2 & |t| \le 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

et $T=[f]$ la distribution régulière associée à f

1. Calculer de trois façons différentes T', T'', T''' en utilisant successivement les définitions :
   $$\forall\varphi \in D, \langle T', \varphi\rangle = -\langle T, \varphi'\rangle \qquad (D_1)$$
   $$[f]' = [f'] + \sum \Delta f(a)\,\delta_a \qquad (D_2)$$
   $$(gT)' = g'T + gT' \qquad (D_3)$$
2. Même question pour $f(t) = u(t)\sin t$

SOLUTION 11

$f(t) = 1 - t^2$ pour $|t| \leq 1 \Longrightarrow f(t) = (1-t^2)\, P_2(t)$; où $P_2(t)$ est le signal port de largeur 2



1. Soit T la distribution régulière associée à $f(t)$; $\langle T, \varphi\rangle = T = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \varphi(t)\, dt$

   (a) On a $\langle T', \varphi\rangle = -\langle T, \varphi'\rangle \Longrightarrow T' = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \varphi'(t)\, dt = -\int_{-1}^{+1} (1-t^2)\, \varphi'(t)\, dt$

   Intégrons par parties : $u = (1-t^2) \Longrightarrow du = -2tdt$ et $dv = \varphi' dt \Longrightarrow v = \varphi(t)$

   $$T' = -\left\{ (1-t)^2\, \varphi(t)\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{+1} 2t\varphi(t)\, dt \right\} = -\int_{-1}^{+1} 2t\varphi(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} -2tP_2(t)\, \varphi(t)\, dt$$

   d'où :

   $$\langle T', \varphi\rangle = [-2tP_2(t)]$$

   De même :$\langle T'', \varphi\rangle = -\langle T', \varphi'\rangle = \int_{-1}^{+1} 2t\varphi'(t)\, dt$

   En intégrant par parties : $u = 2t \Longrightarrow du = 2dt$ et $dv = \varphi' dt \Longrightarrow v = \varphi$, on obtient ;

   $$\langle T'', \varphi\rangle = \left\{ 2t\varphi(t)|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{+1} 2\varphi(t)\, dt \right\} = 2\left[1 \times \varphi(1) - (-1) \times \varphi(-1) - \int_{-1}^{+1} \varphi(t)\, dt \right]$$

   $$= 2\varphi(1) + 2\varphi(-1) - 2\int_{-\infty}^{+\infty} P_2(t)\, \varphi(t)\, dt$$

   soit

   $$\langle T'', \varphi\rangle = 2\delta(t-1) + 2\delta(t+1) + [-2P_2(t)]$$

   $$\langle T''', \varphi\rangle = -\langle T'', \varphi'\rangle = -2\langle \delta(t-1) + \delta(t+1) + [-P_2(t)], \varphi'\rangle$$
   $$= 2\delta'(t-1) + 2\delta'(t+1) + 2\langle [P_2], \varphi'\rangle$$
   $$= 2\delta'(t-1) + 2\delta'(t+1) + 2\int_{-\infty}^{+\infty} P_2(t)\, \varphi'(t)\, dt$$
   $$= 2\delta'(t-1) + 2\delta'(t+1) + 2\int_{-1}^{+1} \varphi'(t)\, dt$$
   $$= 2\delta'(t-1) + 2\delta'(t+1) + 2\{\varphi(1) - \varphi(-1)\}$$

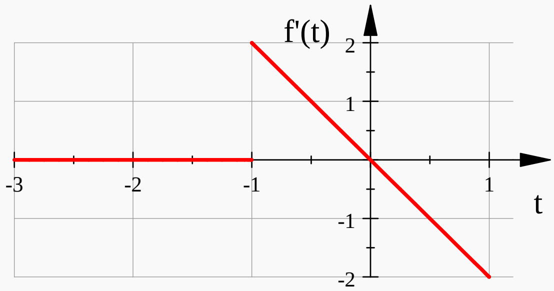
   $$\left\langle T''', \varphi\right\rangle = 2\left[\delta'(t+1) + \delta'(t-1) + \delta(t-1) - \delta(t+1)\right]$$

   (b) Calcul des dérivées en utilisant la définition (D_2) :

$f(t)$ est une fonction continue sur $]-\infty,+\infty[$ et en particulier en $t=-1$ et $t=+1$
donc $\Delta f(-1)=\Delta f(1)=0$

$f(t)=\begin{cases} 1-t^2 & -1\leq t\leq 1 \\ 0 & si\ non \end{cases} \Longrightarrow f'(t)=\begin{cases} -2t & -1\leq t\leq 1 \\ 0 & si\ non \end{cases} = -2tP_2(t)$

$\Longrightarrow [f_h]'=[f_h']=[-2tP_2(t)]$



$f'(t)$

La dérivée $f'(t)$ a deux points de discontinuités :
$t=-1 : \Delta f'(-1)=2-0=2$
$t=+1\ : \Delta f'(+1)=0-(-2)=2$
$f''(t)=-2P_2(t)$
$[f]''=[f'']+\Delta f'(-1)\,\delta(t+1)+\Delta f'(1)\,\delta(t-1)$

$$T''=[-2P_2(t)]+2\delta(t+1)+2\delta(t-1)$$

$P_2(t)$ a deux points de discontinuités :
$t=-1 : \Delta P_2(-1)=1-0=1$
$t=+1\ : \Delta P_2(+1)=0-1=-1$
$\dfrac{dP_2}{dt}=0 \Longrightarrow [P_2]'=0+\delta(t+1)-\delta(t-1)$
$T'''=-2\,[P_2(t)]'+2\delta'(t+1)+2\delta'(t-1)$

$$T'''=-2\delta(t+1)+2\delta(t-1)+2\delta'(t+1)+2\delta'(t-1)$$

(c) Dérivation à l'aide de la définition (D_3) : $(gT)'=g'T+gT'$
Posons $S=[P_2(t)]$ alors $T=[f]=(1-t^2)\,[P_2]=(1-t^2)\,S$
$T'=(1-t^2)'\,S+(1-t^2)\,S'=-2tS+(1-t^2)\,S'$
$S'=[P_2(t)]'=\delta(t+1)-\delta(t-1)\Longrightarrow (1-t^2)\,S'=(1-t^2)\,[\delta(t+1)-\delta(t-1)]$
or $h(t)\,\delta(t-a)=h(a)\,\delta(t-a)$
$\Longrightarrow (1-t^2)\,[\delta(t+1)-\delta(t-1)]=(1-t^2)\,\delta(t+1)-(1-t^2)\,\delta(t-1)$
$=\left(1-(-1)^2\right)\delta_{-1}+(1-1^2)\,\delta_1=0$

$$T'=-2tS=-2t\,[P_2(t)]$$

$T''=-2\,[P_2(t)]-2t\,[P_2]'=-2\,[P_2]-2t\,[\delta(t+1)-\delta(t-1)]$
$=-2\,[P_2]-2(-1)\,\delta(t+1)+2(1)\,\delta(t-1)$

$$T''=-2\,[P_2]+2\delta(t+1)+2\delta(t-1)$$

enfin $T'''=-2\,[P_2]'+2\delta'(t+1)+2\delta'(t-1)$

$$T'''=-2\delta(t+1)+2\delta(t-1)+2\delta'(t+1)+2\delta'(t-1)$$

Remarque 1 La transformée de Fourier de $\delta(t)$ est $F(\delta) = 1$ et $F(\delta_a) = e^{-j\omega a}$,
$\omega = 2\pi\nu \Longrightarrow F(\delta_1) = e^{-j\omega}$ et $TF(\delta_{-1}) = e^{j\omega}$
$F\left(T^{(n)}\right) = (j\omega)^n F(T)$
$\Longrightarrow F\left(\delta_a^{(n)}\right) = (j\omega)^n F(\delta_a) = (j\omega)^n e^{j\omega a}$
$F(T''') = (j\omega)^3 F(T)$
$F(T''') = F\left[-2\delta(t+1) + 2\delta(t-1) + 2\delta'(t+1) + 2\delta'(t-1)\right]$
$= -2F(\delta_{-1}) + 2F(\delta_1) + 2F\left(\delta'_{-1}\right) + 2F\left(\delta'_1\right) = -2e^{j\omega} + 2e^{-j\omega} + 2j\omega e^{-j\omega} + 2j\omega e^{j\omega}$
$= -2 \times 2j\sin\omega + 4j\omega \times 2\cos\omega = j^3\omega^3 F(T) = -j\omega^3 F(T)$

$$F(T) = \frac{4\sin\omega - 8\omega\cos\omega}{\omega^3} = \frac{\sin 2\pi\nu - 2\pi\nu\cos 2\pi\nu}{2\pi^3\nu^3}$$

2. $f(t) = u(t)\sin t$

(a) $\langle T', \varphi\rangle = -\langle T, \varphi'\rangle \Longrightarrow T' = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t)\sin t\varphi'(t)\,dt = -\int\limits_{0}^{\infty} \sin t\varphi'(t)\,dt$

Intégrons par parties : $d(\sin t) = \cos t dt$ et $dv = \varphi' dt \Longrightarrow v = \varphi(t)$

$T' = -\sin t\varphi(t)|_0^\infty + \int\limits_0^\infty \cos t\varphi(t)\,dt = \int\limits_0^\infty \cos t\varphi(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^\infty \cos(t)\,u(t)\,\varphi(t)\,dt$

Car $\varphi(\infty) = \sin 0 = 0$

$$T' = [u(t)\cos t]$$

$\langle T'', \varphi\rangle = -\langle T', \varphi'\rangle \Longrightarrow T'' = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t)\cos(t)\,\varphi'(t)\,dt$

$= -\cos t\varphi|_0^\infty - \int\limits_0^\infty \sin t\varphi(t)\,dt = -\cos(\infty)\,\varphi(\infty) + \cos(0)\,\varphi(0) - T = \varphi(0) - T$

$$T'' = \delta - T$$

$$T''' = \delta' - T'$$

(b) $f(t) = u(t)\sin t$ n'a pas de points de discontinuité $\Longrightarrow \Delta f(a_k) = 0$
$\Longrightarrow T' = \left[(u(t)\sin t)'\right] = [u(t)\cos t]$
la fonction $g(t) = u(t)\cos t$ a au point $t = 0$ une discontinuité de première espèce :
$\Delta g(0) = g(0^+) - g(0^-) = 1 - 0 = 1$
$T'' = [g'] + \Delta g(0)\,\delta$
$g' = (u(t)\cos t)' = -u(t)\sin t$

$$T'' = [-u(t)\sin t] + \delta = -T + \delta$$

(c) Soit $S = [u(t)] \Longrightarrow [u(t)]' = \delta$
$T = (\sin t)\,S$
$T' = (\sin t)'\,S + (\sin t)\,S' = S\cos t + \delta(t)\sin t = S\cos t + \sin(0)\,\delta(t)$
$= (\cos t)\,S = [u(t)\cos t]$
$T'' = (\cos t)'\,S + (\cos t)\,S'\,(-\sin t)\,S + \cos t\delta(t) = -S\sin t + \cos(0)\,\delta$
$= -S\sin t + \delta = -T + \delta$
et $T''' = -T' + \delta'$

Exercice 12 On désigne par $u(t)$ la fonction de Heaviside. Calculer au sens des distributions :

1. $T = \left[\frac{d}{dt} - \lambda\right] u(t)\, e^{\lambda t}$
2. $S = \left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right] u(t) \frac{\sin \omega t}{\omega}$
3. $R = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^n}{dt^n} \left[t^{n-1} u(t)\right]$
4. $\lim\limits_{h \to 0} \left[\frac{1}{h} T(t+h) - T(t)\right]$

SOLUTION 12

1. $T = \left(\frac{d}{dt} - \lambda\right) u(t)\, e^{\lambda t}$

   $= \frac{d}{dt}\left(ue^{\lambda t}\right) - \lambda u e^{\lambda t} = u' e^{\lambda t} + u\lambda e^{\lambda t} - \lambda u e^{\lambda t} = \delta(t)\, e^{\lambda t} = \delta(t)$
2. $S = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right)\left(u(t) \frac{\sin \omega t}{\omega}\right) = \frac{d^2}{dt^2}\left(u(t)\frac{\sin \omega t}{\omega}\right) + \omega u(t) \sin \omega t$

   $= \frac{d}{dt}\left(\delta(t)\frac{\sin \omega t}{\omega} + u(t)\cos \omega t\right) + \omega u(t) \sin \omega t$

   Or $\delta(t)\frac{\sin \omega t}{\omega} = \delta(t) \left.\frac{\sin \omega t}{\omega}\right|_{t=0} = 0$

   $S = \frac{d}{dt}\left(u(t)\cos \omega t\right) + \omega u(t) \sin \omega t = u' \cos \omega t - u\omega \sin \omega t = \delta(t) \cos \omega t = \delta(t)$
3. $R = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^n}{dt^n}\left(t^{n-1} u(t)\right)$

   Soit $R_1 = [u(t)]$ alors $R_1' = \delta(t)$ et $R_2 = \left[t^{n-1} u(t)\right] = t^{n-1} R_1$

   $R_2' = t^{n-1} R_1' + (n-1) R_1 t^{n-2} = \delta(t)\, t^{n-1} + (n-1)\, t^{n-2} R_1 = (n-1)\, t^{n-2} R_1$

   $R_2'' = (n-1)\, t^{n-2} R_1' + (n-1)(n-2)\, t^{n-3} R_1 = (n-1)(n-2)\, t^{n-3} R_1$

   $R_2''' = (n-1)(n-2)(n-3)\, t^{n-4} R_1$

   $\vdots$

   $R_2^{(k)} = (n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-k)\, t^{n-k-1} R_1$

   $\Longrightarrow R^{(n-1)} = (n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-n+1)\, t^{n-n+1-1} R_1 = (n-1)! R_1$

   $R_2^{(n)} = (n-1)! R_1' = (n-1)!\delta(t)$

   $$R = \frac{R_2^{(n)}}{(n-1)!} = \frac{(n-1)!\delta(t)}{(n-1)!} = \delta(t)$$
4. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{T(t+h) - T(t)}{h} = T'(t)$

Exercice 13 Soient a et b deux réels non nuls et $f_{a,b}$ la fonction définie par :

$$f_{a,b} = \begin{cases} \ln|at| & si\ t > 0 \\ \ln|bt| & si\ t < 0 \end{cases}$$

1. Calculer la dérivée de la fonction $f_{a,b}$

2. Montrer que $f_{a,b}$ est localement sommable
3. Calculer la dérivée de la distribution régulière $[f_{a,b}]$.

SOLUTION 13

$f_{a,b}(t) = \ln|at|$ si $t > 0$ et $= \ln|bt|$ si $t < 0$

1. au sens de fonctions on a : $(\ln|at|)' = \dfrac{a}{at} = \dfrac{1}{t}$ de même $(\ln|bt|)' = \dfrac{1}{t}$

   alors $f'_{a,b}(t) = \dfrac{1}{t}$ avec $t \in \mathbb{R}^*$

2. $\displaystyle\int_{-A}^{A} \ln|t|\, dt = 2A(\ln A - 1)$

   La fonction $\ln|t|$ est localement sommable sur tout segment ne contient pas le point $t = 0$
   Donc $f_{a,b}(t)$ est localement sommable puisqu'elle s'écrit sous la forme :
   $f_{a,b}(t) = \ln|t| + \ln|a|\, u(t) + \ln|b|\, u(-t)$

3. $f'_{a,b}(t) = (\ln|t| + \ln|a|\, u(t) + \ln|b|\, u(-t))' = VP\left(\dfrac{1}{t}\right) + \ln|a|\, u'(t) - \ln|b|\, u'(t)$

   $= VP\left(\dfrac{1}{t}\right) + \ln|a|\,\delta(t) - \ln|b|\,\delta(t) = VP\left(\dfrac{1}{t}\right) + \delta(t)\ln\left|\dfrac{a}{b}\right|$

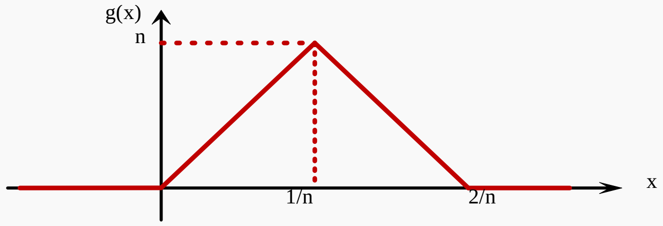
Exercice 14 Soit la suite

$$g_n(x) = \begin{cases} n^2 x & si \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{n} \\ -n^2\left(x - \dfrac{2}{n}\right) & si \quad \dfrac{1}{n} \le x \le \dfrac{2}{n} \\ 0 & si \quad non \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de g_n et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\, dx$
2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ et T_n la distribution associée à g_n
   (a) Montrer que : $\langle T_n, \varphi\rangle - \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)[\varphi(x) - \varphi(0)]\, dx$
   (b) Soit $\varepsilon > 0$ donné, prouver qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que
   $$|x| < \alpha \Longrightarrow |\varphi(x) - \varphi(0)| < \varepsilon$$
   (c) Montrer qu'il existe un entier N tel que, pour $n > N$, on ait
   $$|\langle T_n, \varphi\rangle - \varphi(0)| \le \varepsilon$$
3. En déduire que T_n tend vers δ dans $\mathcal{D}'$.

SOLUTION 14

1. Graphe :



Graphe de $g_n(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 x dx - \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} n^2\left(x-\frac{2}{n}\right)dx = n^2\frac{x^2}{2}\Big|_0^{1/n} - n^2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2x}{n}\right)\Big|_{1/n}^{2/n} = 1$$

2. $\varphi \in \mathcal{D}, T \in \mathcal{D}'$

   (a) $\langle T_n, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,\varphi(x)\,dx$

   Puisque $\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,dx = 1$ alors $\varphi(0)\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,\varphi(0)\,dx = \varphi(0)$

   alors : $\langle T_n, \varphi\rangle - \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,\varphi(x)\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,\varphi(0)\,dx$

   $= \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx$

   (b) La fonction $\varphi(x)$ est une fonction test donc elle est continue et, par suite $\varphi(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \varphi(0)$ ce qui implique qu'il existe un réel α assez petit tel que :

   $$|x| < \alpha \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(0)| < \varepsilon$$

   (c) Si $n \to +\infty$ alors $\frac{2}{n} < \alpha$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ et donc si $n \to +\infty$ on aura $|x| < \alpha$ $\Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(0)| \to 0$

   $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx = \langle T_n, \varphi\rangle - \varphi(0) \to 0$

   ou bien on a $n > N \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(0)| < \varepsilon$

3. Il en résulte $\lim\limits_{n\to+\infty}(\langle T_n, \varphi\rangle - \varphi(0)) = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\langle T_n, \varphi\rangle = \varphi(0)$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \delta(x)$$

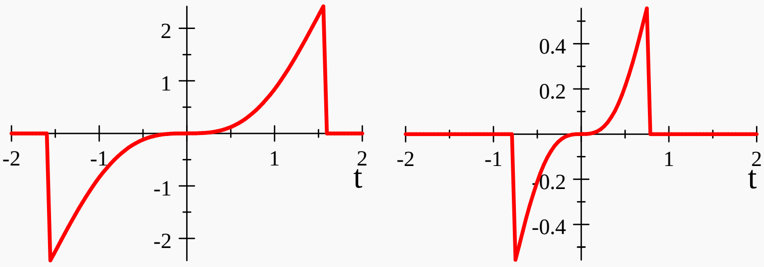
Exercice 15 Soit $u_n(t)$ la fonction définie par

$$u_n(t) = \begin{cases} t^2 \sin nt & si \quad -\frac{\pi}{2n} \leq t \leq \frac{\pi}{2n} \\ 0 & si \quad non \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de $u_n(t)$
2. Montrer que $u_n(t)$ converge vers la distribution nulle.

SOLUTION 15

1. Graphes de $u_1(t)$ et $u_2(t)$



$u_1(t)$ $u_2(t)$

2. Pour $t = 0$, $u_n(0) = 0 \; \forall n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(0) = 0$

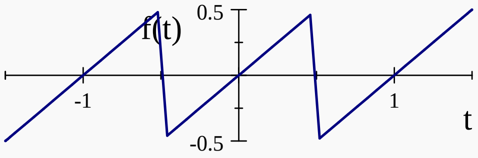
   Pour $t \neq 0$, $\exists n_0$ tel que $|t| > \frac{\pi}{2n_0}$ car t fixé est non nul, alors pour $n > n_0$ on a encore $u_n(t) = 0$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(t) = 0$

Exercice 16 Soit les fonctions périodiques de période 1.$\forall t \in \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

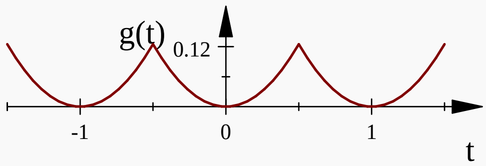
$$\begin{aligned} f(t) &= t \\ g(t) &= \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

1. Déterminer la série de Fourier trigonométrique de la fonction $f(t)$ et préciser sa somme
2. Développer également la fonction $g(t)$ en série de Fourier
3. Montrer que g est la somme de sa série de Fourier au sens des distributions. En déduire que f est également la somme de sa série de Fourier au sens des distributions
4. En dérivant au sens de distributions le développement de f, exprimer à l'aide du peigne $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{k+\frac{1}{2}}$, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cos(2\pi nt)$

SOLUTION 16



$f(t)$



$g(t)$

1. $f(t)$ est une fonction impaire alors les coefficients a_0 et a_n sont nuls

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin n\omega t dt = 2\int_{-1/2}^{1/2} t\sin(2\pi nt)\,dt$$

$$= -\frac{-\sin\pi n + \pi n\cos\pi n}{\pi^2 n^2} = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \text{ alors :}$$

$$\forall t \neq k+\frac{1}{2},\quad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin(2\pi nt)$$

2. $g(t)$ est paire donc $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} g(t)\,dt = \int_{-1/2}^{1/2}\frac{t^2}{2}dt = \frac{1}{24}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} g(t)\cos n\omega t dt = \int_{-1/2}^{1/2} t^2\cos(2\pi nt)\,dt = 2\int_{0}^{1/2} t^2\cos(2\pi nt)\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\pi^2 n^2\sin\pi n - 2\sin\pi n + 2\pi n\cos\pi n}{\pi^3 n^3} = \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi^2 n^2}$$

$$g(t) = \frac{1}{24} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos(2\pi nt)$$

3. $[g] = \dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{2\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}[\cos(2\pi nt)]$

La fonction g est continue et sa dérivée en tant fonction est f on a donc $[g]' = [f]$ donc :

$$[f] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}[\sin(2\pi nt)]$$

4. Les points de discontinuité de $f(t)$ sont $t_k = k + \dfrac{1}{2}$ et $\Delta f(t_k) = -1$ donc

$$[f]' = [f'] - \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k-1/2)$$

$$f'(t) = 1$$

$$[f]' = \left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin(2\pi nt)\right]' = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}[\cos(2\pi nt)]$$

D'où :

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}[\cos(2\pi nt)] = [1] - \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k-1/2)$$

Exercice 17 Soit T une distribution causale et $u(t)$ la fonction échelon.

1. Montrer que $[u] * T$ est une primitive de T
2. Soit $S(t) = \Delta * \Delta$; avec $\Delta = \sum\limits_{n\geq 0} \delta(t-n)$. Calculer S et calculer une primitive de S.

SOLUTION 17

1. Pour montrer que $[u] * T$ est une primitive de T il suffit de montrer que la dérivée de $[u] * T$ est égale à T.
   Soit $R = [u] * T \Rightarrow R' = ([u] * T)'$
   d'après la définition de dérivée de convolution on a $R' = [u]' * T = \delta(t) * T$
   $\delta(t)$ est l'élement neutre pour la convolution donc : $\delta(t) * T = T$ d'où : $([u] * T)' = T$
2. Δ est une distribution causale

$$S = \Delta * \Delta = \left(\sum_{p\geq 0} \delta(t-p)\right) * \left(\sum_{q\geq 0} \delta(t-q)\right) = \sum_{\substack{p\geq 0\\ q\geq 0}} \delta(t-p) * \delta(t-q)$$

or $\delta(t-p) * \delta(t-q) = \delta(t-(p+q))$ donc

$$S = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{p+q=n} \delta(t-(p+q))\right) = \sum_{n\geq 0} (n+1)\,\delta(t-n)$$

car il y a $n+1$ façons d'obtenir n à l'aide de la somme de deux entiers p et q.
d'après la question 1) une primitive de S est $[u * S]$

$$u * S = u(t) * \sum_{n\geq 0} (n+1)\,\delta(t-n)$$
$$= \sum_{n\geq 0} (n+1)\,\delta(t-n) * u(t) = \sum_{n\geq 0} (n+1)\,u(t-n)$$

Exercice 18 Soit n et p deux entiers naturels

1. Déterminer la distribution $t^n \delta^{(p)}(t)$.
2. Montrer que toute distribution T qui vérifie l'équation $t^n T(t) = 0$ peut s'écrire sous la forme :
$$T(t) = \sum_{p=0}^{n-1} a_p \delta^{(p)}(t)$$
   où a_p sont des constantes arbitraires
3. Déterminer la solution générales de l'équation
$$t^n T(t) = \delta(t)$$

SOLUTION 18

1. $t^n\delta^{(p)} = \left\langle t^n\delta^{(p)}, \varphi \right\rangle = \left\langle \delta^{(p)}, t^n\varphi \right\rangle$ puisque $\langle gT, \varphi\rangle = \langle T, g\varphi\rangle$

   D'autre part : $\left\langle T^{(p)}, \varphi \right\rangle = (-1)^p \left\langle T, \varphi^{(p)} \right\rangle \Longrightarrow \left\langle \delta^{(p)}, t^n\varphi \right\rangle = (-1)^p \left.\dfrac{d^p}{dt^p}(t^n\varphi)\right|_{t=0}$

   $(t^n\varphi)' = t^n\varphi' + nt^{n-1}\varphi$

   $(t^n\varphi)'' = \left(t^n\varphi' + nt^{n-1}\varphi\right)' = nt^{n-1}\varphi' + t^n\varphi'' + nt^{n-1}\varphi' + n(n-1)t^{n-2}\varphi = t^n\varphi'' + 2nt^{n-1}\varphi' + n(n-1)t^{n-2}\varphi$

   $(t^n\varphi)''' = nt^{n-1}\varphi'' + t^n\varphi''' + 2nt^{n-1}\varphi'' + 2n(n-1)t^{n-2}\varphi' + n(n-1)(n-2)t^{n-3}\varphi + n(n-1)t^{n-2}\varphi' = 3nt^{n-1}\varphi'' + t^n\varphi''' + 3n(n-1)t^{n-2}\varphi' + n(n-1)(n-2)t^{n-3}\varphi$

   $\vdots$

   $\dfrac{d^p}{dt^p}(t^n\varphi) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} C_p^k \frac{d^k}{dt^k}(t^n) \times \frac{d^{p-k}}{dt^{p-k}}\varphi$

   $\Longrightarrow \left\langle \delta^{(p)}, t^n\varphi \right\rangle = (-1)^p \left.\dfrac{d^p}{dt^p}(t^n\varphi)\right|_{t=0} = (-1)^p \left\{\displaystyle\sum_{k=0}^{p} C_p^k \frac{d^k}{dt^k}(t^n) \times \frac{d^{p-k}}{dt^{p-k}}\varphi\right\}_{t=0}$

   on a $\dfrac{d^k t^n}{dt^k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ n(n-1)\cdots(n-k+1)\,t^{n-k} & \text{si } k \le n \end{cases}$

   Pour $t = 0$ la seule dérivée de t^n non nulle pour $t = 0$ est celle d'ordre n : $(t^n)^{(n)} = n!$

   $\Longrightarrow \left\langle \delta^{(p)}, t^n\varphi \right\rangle = (-1)^p \left\{C_p^{p-n} \times n! \times \dfrac{d^{p-n}}{dt^{p-k}}\varphi\right\}_{t=0} = (-1)^p \dfrac{p!}{n!\,(p-n)!} n!\varphi^{(p-n)}(0)$

   $= (-1)^n \dfrac{p!}{(p-n)!}\left[(-1)^{p-n}\varphi^{(p-n)}(0)\right] = (-1)^n \dfrac{p!}{(p-n)!}\delta^{(p-n)}$

   $\Longrightarrow t^n\delta^{(p)} = \begin{cases} 0 & \text{si } p < n \\ (-1)^n \dfrac{p!}{(p-n)!}\delta^{(p-n)} & \text{si } p \ge n \end{cases}$

   par exemple : $t\delta'' = (-1)^1 \dfrac{2!}{(2-1)!}\delta^{(2-1)} = -2\delta'$ et $t^3\delta'' = 0$

2. T est une distribution qui vérifie l'équation $t^nT = 0$ alors d'après 1) $\delta^{(p)}$ est une solution de cette équation si $p < n$ donc $\delta, \delta', \delta'', ..., \delta^{(n-1)}$ sont toutes de solutions alors toute combinaison linéaire de ces distribution est aussi une solution par suite la solution générale s'écrit :

   $$T = a_0\delta + a_1\delta' + a_2\delta'' + ... + a_{n-1}\delta^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\delta^{(k)}$$

3. On a trouvé que $t^n\delta^{(p)} = (-1)^n \dfrac{p!}{(p-n)!}\delta^{(p-n)}$ si $p \ge n$ en particulier pour $p = n$: $t^n\delta^{(n)} = (-1)^n n!\delta \Longrightarrow t^n\left[\dfrac{(-1)^n}{n!}\delta^{(n)}\right] = \delta$ donc $T_1 = \dfrac{(-1)^n}{n!}\delta^{(n)}$ est une solution de l'équation $t^nT = \delta$

   Soit T_0 une autre solution de cette équation

   $\Longrightarrow t^nT_1 = t^nT_0 = \delta \Longrightarrow t^n(T_1 - T_0) = 0 \overset{d'après\ 2)}{\Longrightarrow} T_1 - T_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k\delta^{(k)}$

   alors la solution générale de l'équation $t^nT = \delta$ est

   $$T(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\delta^{(k)} + \frac{(-1)^n}{n!}\delta^{(n)}$$