Calcul Différentiel et Intégral MVA005
Examen final semestre 1 2008-2009
Solution

Partie A : Traiter au choix 3 exercices seulement (3 points pour chaque exercice)

Exercice A 1 *Soit a un réel strictement positif et différent de* 1*. on considère la suite* U_n *définie par* $U_0 > 0$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $U_{n+1} = \dfrac{1 + aU_n}{a + U_n}$

Vérifier que la suite numérique v_n *définie par* $v_n = \dfrac{-1 + U_n}{1 + U_n}$ *est géométrique de raison* $q = \dfrac{a-1}{a+1}$*. En déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ *puis* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice A 2 *Soit la fonction f définie par*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt{x^2+1} + \ln\sqrt{x^2+1}}{x^2} & si \;\; x \neq 0 \\ 0 & si \;\; x = 0 \end{cases}$$

1. *Etudier la continuité de f en* $x = 0$
2. *Donner le développement de f à l'ordre* 3 *au voisinage de* 0

Exercice A 3 *Calculer les limites suivantes:*

$$\lim_{x\to0} \frac{x^2}{xe^x - e^x + 1} \qquad \lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{e^x - 1} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+e^x) - e^x}{1 - e^{1/x}}$$

Exercice A 4 *On considère la fonction* $f(x) = \arccos x$

1. *Tracer le graphe* (C) *de la fonction pour* $-1 \le x \le 1$.
2. *Calculer le volume de corps de révolution de la courbe (C), limitée par* $-1 \le x \le 1$ *par rotation : autour de l'axe ox et autour de l'axe oy.*

Exercice A 5 *Soient* $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x} dx$ *et* $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x} dx$

1. (a) *Calculer* $I + J$
   (b) *En utilisant un changement de variable convenable montrer que* $I = J$*. En déduire la valeur de* I
2. *Calculer les intégrales* $I_1 = \displaystyle\int_{-4}^{4} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$; $I_2 = \displaystyle\int_0^3 \frac{t\ln(t^2+1)}{t^2+1} dt$; $I_3 = \displaystyle\int \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right) dx$

Partie B : Exercices obligatoires

Exercice B 1 (4 points) *On considère l'équation différentielle suivante :*

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \qquad \text{(E)}$$

1. *Déterminer la solution générale de l'équation différentielle* (E)

2. *Déterminer la solution particulière f de (E) telle que : $f(0) = -1$ et $f'(0) = 0$*

3. *Soit la fonction f définie par : $f(x) = e^{2x} - 2e^{x}$*

   (a) *Etudier ses variations et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé.*

   (b) *Préciser les points d'intersection de (C) avec les axes et les tangentes à (C) en ces points.*

4. *Soit λ un nombre réel strictement négatif.*

   On note : $I_\lambda = \displaystyle\int_{\lambda}^{\ln 2} f(x)\,dx$

   (a) *Calculer $I(\lambda)$.*

   (b) *Etudier la limite de $I(\lambda)$ lorsque λ tend vers $-\infty$*

5. *Soit (E_k) l'équation $e^{2x} - 2e^{x} = k$*

   (a) *Etudier le nombre de solutions de (E_k) suivant les valeurs de k.*

   (b) *Montrer que, lorsque (E_k) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2, ces solutions vérifient la relation*

   $$e^{x_1} + e^{x_2} = 2 \tag{1}$$

   (c) *Réciproquement ; montrer que si x_1 et x_2 sont deux réels distincts vérifiant la relation (1), ce sont les deux solutions d'une équation (E_k).*

Exercice B 2 (3.5 points) *Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par* $f(x) = \dfrac{e^{x} - 1}{e^{x} + 1}$

1. *Justifier quef est dérivable sur $\mathbb{R}$, expliciter f'*

2. *Dresser le tableau de variations de f (limites incluses) et tracer dans un repère orthonormé C_f.*

3. *Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter.*

4. *Déterminer l'expression de la fonction réciproque f^{-1}.*

5. *Tracer dans le même repère orthonormé la courbe de f^{-1}*

Exercice B 3 (3.5 points) *On considère l'équation différentielle*

$$y' - \frac{y}{x} - y^2 = -9x^2 \tag{E}$$

1. *Déterminer un réel a tel que $y = ax$ soit solution de l'équation (E). On note y_0 cette solution.*

2. *Montrer que le changement de fonction $y = y_0 - \dfrac{1}{z}$ transforme l'équation (E) en l'équation suivante*

   $$z' + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z = 1 \tag{E'}$$

3. *Résoudre l'équation (E') sur $[0, +\infty[$*

4. *En déduire l'ensemble de toutes les solutions de (E) sur $[0, +\infty[$*