Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Centre du Liban Associé au
Conservatoire Nationale des Arts et Métiers – Paris

Calcul différentiel et intégral- MVA005

Examen Final 2009-2010 Semestre I

Documents interdits **Durée : 3: 00 h**

Partie A: Traiter au choix un exercice.

Exercice A 1 *Considérer les intégrales:*

$$I = \int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx \quad et \quad I = \int \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

1. Calculer $I + J$ et $I - J$
2. Déduire I et J.

Exercice A 2 *Soeint les intégrales*

$$I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \qquad et \qquad J = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x)\, dx$$

Montrer que : $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a + b - x)\, dx$. Utiliser cette relation pour calculer I et J.

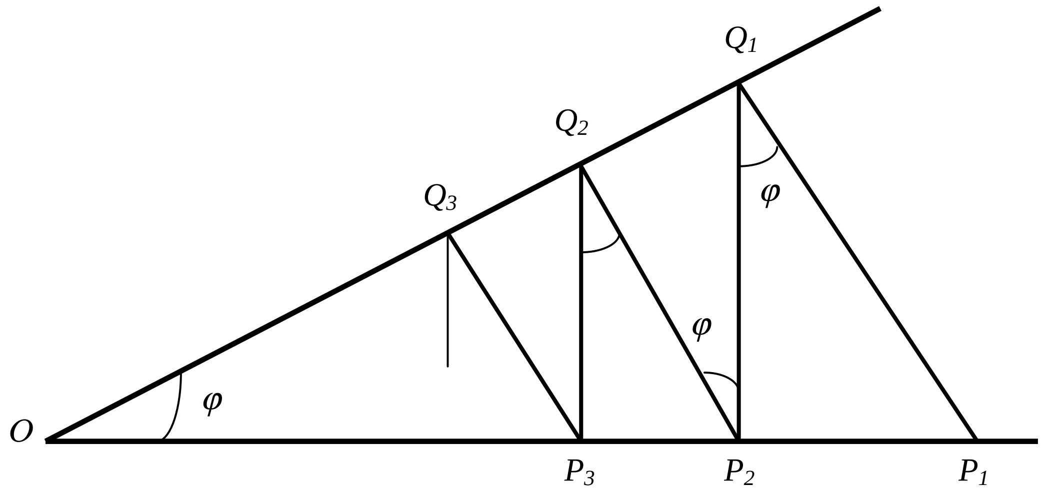
Partie B: Traiter au choix un exercice

Exercice B 1 *Soit la suite:*

$$u_n = \frac{\sqrt{n^2 + 4n}}{n + 1}$$

1. Montrer que u_n est bornée pour $n \geq n_0$. (où n_0 est une valeur à déterminer).
2. Montrer que u_n est décroissante pour $n \geq n_1$. (où $n_1$est une valeur à déterminer).
3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
4. Quelle est la nature de la série : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 4n}}{n + 1}$

Exercice B 2 *:*



On considère deux demi droites OP et OQ, d'angle entre eux $\varphi < \frac{\pi}{2}$.(Voir figure)
Soient les points : $P_k \in OP$ et $Q_k \in OQ$; avec $k = 1, 2, 3, \cdots n$, tel que:
$OP_1 = a$, $P_kQ_k \perp OQ$ et $Q_kP_{k+1} \perp OQ$.
On désigne par a_k la longueur du segment P_kQ_k et par b_k celle de Q_kP_{k+1}
Calculer, quand la somme existe:

$$L(\varphi) = \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k + b_k)$$

Partie C: Traiter au choix un exercice

Exercice C 1 *Soit la fonction*

$$f(x) = \frac{e^x \sin x - \ln(1+x)}{x^2}.$$

1. Déterminer son dévoloppement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2. Montrer que f et prolongeable par continuité en 0.
3. Montrer que le prolongement de f est dérivable en 0.

Exercice C 2 *Soit la fonction $f(x)$ definie par :*

$$f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} - 1$$

1. Déterminer le domaine de définition de $f(x)$
2. Donner le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0, déduire la prolongement par continuité de $f(x)$
3. Déduire l'équation de la tangente de la fonction $h(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}$ au point $x = 0$
4. Calculer la limite quand $x \to 0$ de la fonction : $g(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$

Partie D: Problèmes obligatoires

Problème 1 *On désigne par* (C) *l'arc de l'éllipse :* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $y \geq 0$ *et* $x \geq 0$ *avec* $b > a > 0$.

1. Calculer l'aire de la zone limitée par (C) et les axes de coordonnées.
2. Déduire l'aire du disque : $x^2 + y^2 = R^2$.
3. Calculer le volume du solide obtenue par rotation complète de (C) autour de l'axe Ox.
4. Calculer le volume du solide obtenue par rotation complète de (C) autour de l'axe Oy.
5. Déduire le volume de la sphère: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Problème 2 *On considère les équations différentielles:*

$$y'' + 2y' + 5y = x \cos x \qquad (E1)$$

et

$$(x-1)y'' + (2x-1)y' + xy = 0 \qquad (E2)$$

1. Déterminer la solution générale de l'équation $(E1)$.
2. Trouver la valeur du réel a tel que $y_0 = e^{ax}$ soit une solution particulière de $(E2)$
   (a) On considère la fonction $z = z(x)$ telle que $y = ze^{-x}$.Vérifier que l'équation différentielle en $z(x)$:
   $$(x-1)z'' + z' = 0 \qquad (E3)$$
   est équivalente à l'équation $(E2)$.
   (b) Soit $\omega(x) = z'(x)$: Résoudre l'équation différentielle de premier ordre en $\omega(x)$ et déduire la solution générale de $(E2)$
   (c) Trouver la solution de $(E2)$ qui vérifie les conditions: $y(2) = e^{-2}$ et $y'(2) = e^{-2}$.