Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

# Calcul différentiel et intégral- MVA005

*Examen Final 2010-2011 Semestre I*

**Documents interdits** **Durée : 3: 00 h**

*Sujet coordonné par : Dr. Noureddine ASSAAD*

Proposé pour les centres de: Beyrouth, Baakline, Baalbek, Ghazza,Tripoli, Bickfaya

---

**Exercice 1** *On considère les deux intégrales:*

$$I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} \quad et \quad J(x) = \int \frac{x^5+x^3-x+1}{x^4+x^2}dx$$

1. Montrer que $I(x)$ s'exprime sous la forme $I = \int \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{2x^2}dx$,puis calculer $I$
2. Montrer que $f(x) = \frac{x^5+x^3-x+1}{x^4+x^2}$ s'exprime sous la forme $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + cx + \frac{Ax+B}{x^2+1}$ et calculer $J$.

**Exercice 2** *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

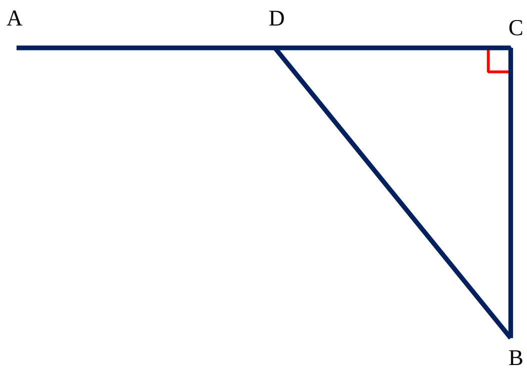
1. $y' - \frac{2y}{x-1} = 2(x-1)$
2. $y'' - 5y' + 4y = x + 2e^x$. Donner une solution particulière vérifiant les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

**Exercice 3** *En utilisant le développement en série de Taylor calculer :* $\lim_{x \to 0} \left( \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$

**Exercice 4** *Un tracteur partant d'un point $A$ situé sur une route rectiligne doit atteindre un point $B$ situé dans un champ. On connait les distances $AC = \ell$ et $CB = d$. Si $v$ est la vitesse du tracteur dans le champ alors que sur la route sa vitesse est $2v$.*

*Il quitte la route en un point $D$ de $[AC]$ tel que $DC = x$ avec $0 \leq x \leq \ell$. Les trajets successifs de $A$ à $D$ et de $D$ à $B$ sont supposés rectilignes.*

*Déterminez le point $D$ pour que le temps total de $A$ à $B$ soit minimal. Discutez suivant $\ell$ et $d$.*



**Exercice 5** *Soit la fonction suivante :*

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

1. Montrer que $f(x)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. $f(x)$ est-elle dérivable au point $x = 0$ ?
3. Calculer les limites de $f(x)$ quant $x$ tend respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$
4. Montrer que $f(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et qu'elle admet une fonction réciproque. Préciser l'expression de sa fonction réciproque.

**Exercice 6** *Considérons les deux fonctions réelles suivantes :* $f(x) = x$ *et* $g(x) = x\sqrt{x}$

1. Représenter ces 2 fonctions dans le même repaire orthonormé.
2. Déterminer l'aire enfermée entre ces 2 courbes.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $g(x)$ en $x = 1$.
4. Déterminer le volume obtenu en en faisant tourner l'aire enfermée entre ces 2 courbes autour de l'axe $Ox$.
5. Déterminer le volume obtenu en en faisant tourner l'aire enfermée entre ces 2 courbes autour de l'axe $Oy$.
6. Déterminer la longueur de la courbe $g(x)$ entre $x = 0$ et $x = 1$.