



*Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban*

le cnam

Calcul différentiel et intégral - MVA005

Examen Final 2011-2012 Semestre I

Durée : 3: 00 h

Documents, téléphones, ordinateurs : strictement interdits

Sujet coordonné par : Dr. Nouredine ASSAAD

Proposé pour les centres de: Beyrouth, Baakline, Baalbek, Ghazza, Tripoli, Bickfaya, Nahr Ibrahim

Exercice 1 On désigne par $f(x)$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$$

1. Montrer que $f(x)$ s'exprime sous la forme $f(x) = Ax + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ où A, B, C sont des réelles à déterminer.
2. Calculer, alors: $I = \int f(x) dx$.
3. En utilisant un changement convenable de variable Déduire $J = \int (\tan t)^3 dt$.

Exercice 2 On considère l'équation différentielle suivante :

$$(1-x)y' + y = \frac{x-1}{x} \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation sans second membre associée, en précisant où elle existe.
2. En utilisant la méthode de variation de constante, déterminer une solution particulière de (E). En déduire la solution générale de (E).
3. Calculer la solution $y(x)$ de (E) telle que $y(2) = 1$.

Exercice 3 On considère les fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = x + 2$$

et on désigne par A et B les points d'intersection des ses courbes.

1. Tracer les courbes des ces fonctions dans le même repère orthonormé et déterminer les coordonnées des points A et B .
2. Calculer l'aire de la région limitée par les deux courbes.
3. Calculer le volume du solide de révolution produit par la rotation de la région limitée par les deux courbes autour de l'axe $x'Ox$.
4. Calculer les longueurs du segment $[AB]$ et de la branche parabolique \widetilde{AB} .

Exercice 4 On considère l'équation différentielle:

$$y'' - y' - 6y = xe^{2x} \quad (D)$$

1. Déterminer la solution générale de l'équation sans second membre associée à (D).
2. Trouver une solution particulière de (D).
3. Déterminer la solution générale de l'équation complète (D).
4. Trouver la solution particulière de (D) vérifiant les conditions : $y(0) = \frac{3}{16}$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 5 Etudier la nature et calculer la somme si c'est possible des séries suivantes:

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)} \quad S_2 = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \quad S_3 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{5^n}$$

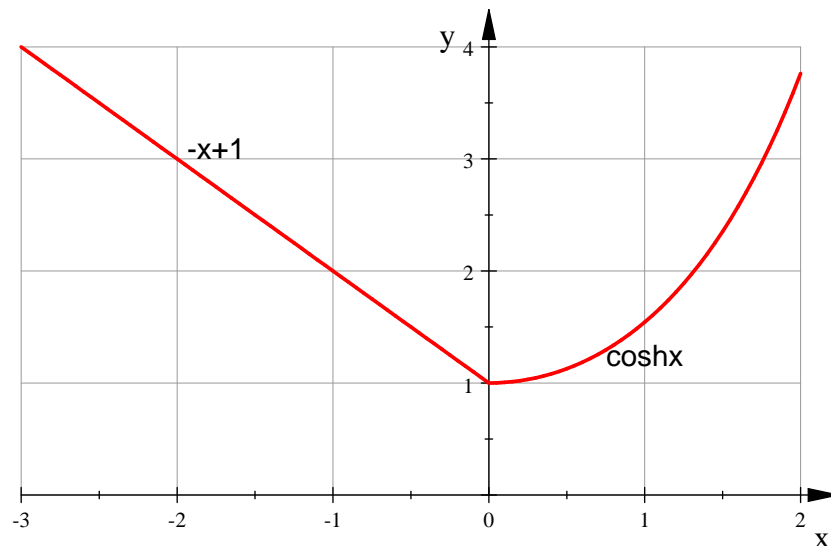
Exercice 6 On considère les deux suites numériques: $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ définies par:

$$\begin{cases} u_0 \leq v_0 \\ u_n = \frac{2u_{n-1} + v_{n-1}}{3} \\ v_n = \frac{2v_{n-1} + u_{n-1}}{3} \end{cases}$$

et soit $\omega_n = u_n - v_n; n \geq 0$

1. Montrer que ω_n est une suite géométrique, en donnant la raison et le premier terme.
2. Exprimer ω_n en fonction de n et en déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = 0$.
3. Montrer que u_n et v_n sont deux suites adjacentes
4. calculer leur limites commune en fonction de u_0 et v_0 .

Exercice 7 On considère la figure suivante qui représente une fonction $f(x)$



1. D'après le graphe ci-dessus et sans faire de calculs, la fonction f est-elle dérivable en 0? Justifier.
2. Trouver $f'(0^+)$ et $f'(0^-)$.