Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Calcul différentiel et intégral- MVA005

Examen Final 2012-2013 **Durée : 3: 00 h**

Documents, téléphones, ordinateurs : strictement interdits

Sujet coordonné par : Dr. Noureddine ASSAAD

Proposé pour les centres de: Beyrouth, Baakline, Baalbek, Ghazza,Tripoli, Bickfaya, Nahr Ibrahim

---

Exercice 1 (10 points) *Posons:* $f(x) = x^3 \ln(1+x)$

1. Montrer que $f(x)$ est dérivable autant de fois qu'on veut sur $]-1, +\infty[$.
2. Développer en série de Taylor à l'ordre 6 la fonction $f(x)$ au point $x_0 = 0$.
3. Déduire $f^{(k)}(0)$ pour $k = 2, 3, 4, 5$, où $f^{(k)}(0)$ est la dérivée d'ordre k au point 0.

Exercice 2 (15 points) *Soient m et n des entiers positifs. On considère la fonction:*

$$f_{m,n}(x) = \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$$

1. Etudier $\lim\limits_{x\to 0} f_{m,n}(x)$ en distinguant les cas :

   a) $m = n$ *b)* $m > n$ *c)* $m < n$

2. Déduire :

   a) $\lim\limits_{x\to 0} f_{1,1}(x)$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0} f_{2,1}(x)$ *c)* $\lim\limits_{x\to 0} f_{1,2}(x)$ *d)* $\lim\limits_{x\to 0} f_{1,3}(x)$

Exercice 3 (15 points) *Soit :*$I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx$

1. Montrer que $\forall n \geq 2 : I_n + I_{n-2} = \dfrac{1}{n-1}$.
2. Calculer I_0 et I_1.Déduire I_3 et I_4
3. En utilisant le théorème de la moyenne calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
4. Si $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$, que resprésente géométriquement, relativement à f, le nombre πI_1.

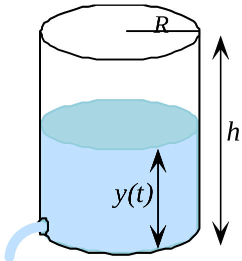
Exercice 4 (15 points) *On considère un récipient cylindrique de hauteur h et de rayon de base R contenant un liquide non visqueux, le récipient est percé en bas par un petit trou circulaire rayon r.*

Suivant la loi de Torricelli l'écoulement du liquide est régi par l'équation différentielle :

$$\frac{dV}{dt} + kA\sqrt{y} = 0 \qquad (E_1)$$

Où à l'instant t :$V = V(t)$ est le volume de l'eau dans le récipient , $y = y(t)$ est sa hauteur, A est la section du trou et k une constante positive. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le récipient était plein $(y(0) = h)$.

Applications numériques: $h = 100\,\text{cm}$ $R = 30\,\text{cm}$ $r = 1\,\text{cm}$ $k = 40\,\text{cm}^{1/2}.\text{s}^{-1}$



1. Montrer que l'équation (E_1) devient une équation à variables séparables sous la forme:
$$\frac{dy}{dt} = -k\alpha^2\sqrt{y} \qquad (E_2)$$
où $\alpha = \dfrac{r}{R}$.

2. En intégrant l'équation (E_2) ,dèterminer la hauteur instantanée du liquide $y\,(t)$.

3. A quelle instant le récipient devient vide?

Exercice 5 (15 points) *On donne l'équation différentielle*
$$xy' + y = (xy)^{3/2} \qquad (B_1)$$

1. En utilisant un changement de variable convenable, montrer que cet équation se transforme en une équation différentielle linéaire:
$$-2xz' + z = x\sqrt{x} \qquad (B_2)$$

2. Résoudre l'équation B_2 et déduire la solution générale de B_1.

Exercice 6 (20 points) *On considère l'équation différentielle :*
$$y'' - 2ay' + y = 2a\sin x \qquad (E)$$
Où a est un réel tel que $a \in \,]-1, 0[\, \cup \,]0, 1[$ *.On pose* $\omega = \sqrt{1-a^2}$.

1. Déterminer $y_1\,(x)$ la solution générale de l'équation sans second membre associée à (E) .

2. Déterminer $y_2\,(x)$ une solution particulière de (E). Déduire $y\,(x)$ la solution générale de (E) .

3. Déterminer $y_p\,(x)$ la solution de (E)telle que $y_p\,(0) = 0$ et $y'_p\,(0) = 0$.

4. Soit $u\,(x)$ la fonction solution de l'équation différentielle $u''-2u'+u = 2\sin x$ avec $u\,(0) = 0$ et $u'\,(0) = 0$.

   Comparer $u\,(x)$ et $\lim\limits_{a\to 1} y_p\,(x)$.

Exercice 7 (10 points) *On considère les suites numériques:*
$$u_n : \begin{cases} u_0 = 9e \\ u_{n+1} = 3\sqrt{u_n} \end{cases} \qquad \textit{et } v_n = \ln\left(u_n/9\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, en précisant la raison q et le premier terme v_0.

2. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$.