Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Calcul différentiel et intégral - MVA005 -

Examen Final 2013-2014-Semestre I **Durée : 2h : 00**

Sujet coordonné par : Dr. Noureddine ASSAAD

centres de : Beyrouth, Baakline, Baalbek, Ghazza,Tripoli, Bickfaya, Nahr Ibrahim

---

Documents, téléphones, ordinateurs : strictement interdits

Exercice 1 (20 points) : Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \alpha u_n + \beta n + \gamma$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ où α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$

1. Calculer α, β et γ sachant que $u_2 = 3, u_3 = 4$ et $u_4 = 3$
2. Dans cette question on prend $\alpha = 2, \beta = -3, \gamma = 4.$
   Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$v_n = u_n - 3n + 1$$

   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

   (b) Calculer v_n en fonction de n. En déduire u_n en fonction de n.

   (c) Pour $n \geq 2$, calculer en fonction de n

$$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

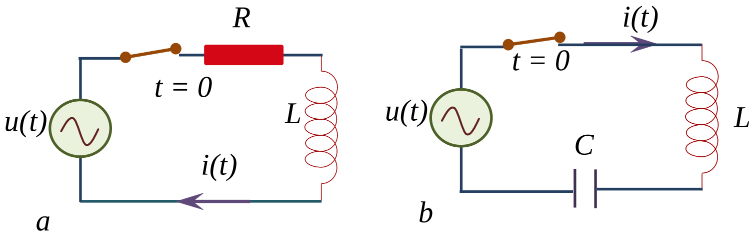
   et

$$R_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

Exercice 2 (20 points) : Dans le plan (xOy) on considère les segments des droites $[AB]$ et $[BC]$ tels que $A(0,3)$, $B(1,0)$, $C(4,9)$

1. Représenter graphiquement les points A, B, C et les segments $[AB]$ et $[BC]$.
2. Déterminer les équations des droites (AB) et (BC)
3. Calculer le volume du solide (S) obtenu par rotation autour de l'axe Ox de la zone limitée par l'axe ox et les segments $[AB]$ et $[BC]$.
4. Tracer une figure montrant le solide (S).

Exercice 3 (40 points) : Un circuit (R, L), contenant un conducteur ohmique de résistance constante R, (exprimée en Ω), en série avec une bobine d'inductance pure de L millihenrys (mH), et un générateur de tension variable $u(t)$ exprimée en volt (V) (Fig. a)



Le courant électrique $i(t)$ est en fonction du temps, exprimée en ampères (A) et défini par l'équation différentielle

$$L\frac{di}{dt} + Ri = u(t)$$

1. Déterminer $i(t)$ si $R = 6\,\Omega, L = 3\,\mathrm{mH}, u(t) = 3\sin t$ V. et $i(0) = 0\,\mathrm{A}$.
2. On considère maintenant le circuit (L, C), (Fig. b) un condensateur de capacité C (exprimée en mF) en série avec la bobine (L), soumis, à l'instant $t = 0$, à la tension $u(t) = u_0 \cos \omega t$

   Le courant électrique est alors défini en fonction du temps par l'équation différentielle :

   $$L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C} = u(t)$$

   (a) Déterminer l'expression générale de $i(t)$ en fonction de u_0, ω et $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \neq \omega$

   (b) On donne : $L = 1\,\mathrm{mH}, C = \dfrac{1}{9}\,\mathrm{mF}$, $u(t) = 5\cos 5t$. Déterminer l'expression particulière de $i(t)$ en prenant comme conditions initiales $i(0) = 0\,\mathrm{A}$ et $\dfrac{di}{dt}(0) = 0$.

Exercice 4 (20 points) : Calculer l'intégrale :

$$I(x) = \int \frac{3x+2}{1-x^2}dx$$

déduire

$$J(t) = \int \frac{3\cos t + 2}{\sin t}dt$$