

## Calcul différentiel et intégral - MVA005

Examen Final 2016-2017  Durée : 2h :00

centres de : Beyrouth, Baakline, Baalbek, Ghazza, Tripoli, Bickfaya, Nahr Ibrahim



### SOLUTIONS

#### Exercice 1 (20 points) :

1. Donner le D.L de  $\frac{1}{1+x}$  en l'infini à l'ordre 3.
2. Déduire le D.L de  $\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$  en l'infini à l'ordre 2.
3. Déterminer l'équation de l'asymptote à la courbe de la fonction  $f(x) = x \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$ , ainsi que sa position relativement à la courbe.

#### SOLUTION 1

$$1. \frac{1}{1+x} = \frac{1}{x(1+1/x)} = \frac{t}{1+t}; \quad t = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \quad \boxed{2 \text{ points}}$$

$$\frac{t}{1+t} = t - t^2 + t^3 + t^3 \varepsilon(t) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3} \varepsilon(x) \quad \boxed{3 \text{ points}}$$

$$2. \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \varepsilon(x)$$

$$\text{Soit } u = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

$$\ln\left(\frac{x}{1+x}\right) = \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2 \varepsilon(u) \quad \boxed{2 \text{ points}}$$

$$= \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 \varepsilon(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2} \varepsilon(x) \quad \boxed{4 \text{ points}}$$

$$3. f(x) = x \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) = x \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2} \varepsilon(x)\right)$$

$$= -1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x} \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -1 \quad \boxed{4 \text{ points}}$$

Donc  $y = -1$  est une asymptote horizontale à la courbe de  $f$ . 1 point

$$f(x) - y \simeq \frac{1}{2x}$$

 Au voisinage de  $+\infty$  l'asymptote est au **dessous** la courbe 2 points

 Au voisinage de  $-\infty$  l'asymptote est au **dessus** la courbe 2 points



**Exercice 2 (30 points)** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on pose

$$I_{n,p} = \int_0^1 x^n (\ln x)^p dx$$

1. Intégrer par parties  $I_{n,p}$  pour établir la relation :

$$I_{n,p} = -\frac{p}{n+1} I_{n,p-1}$$

sachant que  $[x^\alpha (\ln x)^\beta]_{(0)} = 0$  pour tous  $\alpha, \beta > 0$ .

2. Sachant que  $I_{n,0} = \frac{1}{n+1}$ , montrer que

$$I_{n,p} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}$$

3. Dédurre,  $\int_0^1 x^3 (\ln x)^2 dx$

### SOLUTION 2

1. Intégration par parties :  $\begin{cases} u = (\ln x)^p & \implies du = p \frac{(\ln x)^{p-1}}{x} dx \\ dv = x^n dx & \implies v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$  5 points

$$I_{n,p} = \int_0^1 x^n (\ln x)^p dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x)^p \Big|_0^1 - \frac{p}{n+1} \int_0^1 x^n (\ln x)^{p-1} dx$$
 3 points

On a  $\ln(1) = 0$  et  $(x^{n+1} (\ln x)^p)_{(0)} = 0$  donc  $\frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x)^p \Big|_0^1 = 0$ , 2 points

$$\text{Soit } I_{n,p} = -\frac{p}{n+1} \int_0^1 x^n (\ln x)^{p-1} dx = -\frac{p}{n+1} I_{n,p-1}$$
 5 points

2. On a

$$\begin{aligned} I_{n,p} &= -\frac{p}{n+1} I_{n,p-1} = \left(-\frac{p}{n+1}\right) \left(-\frac{p-1}{n+1} I_{n,p-2}\right) \\ &= \left(-\frac{p}{n+1}\right) \left(-\frac{p-1}{n+1}\right) \left(-\frac{p-2}{n+1} I_{n,p-3}\right) \end{aligned}$$

$\vdots$

$$= \left(-\frac{p}{n+1}\right) \left(-\frac{p-1}{n+1}\right) \left(-\frac{p-2}{n+1}\right) \cdots \left(-\frac{2}{n+1}\right) \left(-\frac{1}{n+1}\right) I_{n,0}$$

$$= \left(-\frac{p}{n+1}\right) \left(-\frac{p-1}{n+1}\right) \left(-\frac{p-2}{n+1}\right) \cdots \left(-\frac{2}{n+1}\right) \left(-\frac{1}{n+1}\right) \left(\frac{1}{n+1}\right)$$
 5 points

$$= \frac{(-1)^p p \times (-1)^{p-1} (p-1) \times \cdots \times (-1)^2 \times (-1)^1}{(n+1)(n+1) \cdots (n+1)} \frac{1}{n+1} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}$$
 5 points

3. En utilisant la dernière formule, avec  $n = 3$  et  $p = 2$ , on trouve ;

$$\int_0^1 x^3 (\ln x)^2 dx = \frac{(-1)^2 (2!)}{(3+1)^3} = \frac{1}{32}$$
 5 points



**Exercice 3 (25 points)** L'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique avec résistance de l'air est :

$$x'' + \omega^2 x + rx'|x'| = 0 \quad (1)$$

où  $x = x(t)$  est la position à l'instant  $t$ ,  $\omega^2$  et  $r$  sont deux paramètres positifs. Soit  $v(x(t)) = x'(t)$  la vitesse au point  $x(t)$ .

1. Montrer que l'équation (1) est équivalente à l'équation de Bernoulli.

$$v'(x) + \sigma r v(x) = -\omega^2 x v^{-1} \quad (2)$$

où  $\sigma = \frac{|v|}{v} = \pm 1$  ( $\sigma$  désigne le signe de  $v$ )

2. Utiliser un changement de variable convenable pour montrer que l'équation (2) est équivalente à une équation linéaire que l'on doit préciser. Résoudre cette dernière équation linéaire en déduire la solution de l'équation (2) sachant que  $v(0) = 0$ .

### SOLUTION 3

1. On a  $v(x) = x'(t)$  donc  $x''(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v'(x) x'(t) = v'(x) v(x)$  **2 points**

$$x'|x'| = v|v| = \sigma v^2 \quad \text{2 points}$$

L'équation (1) s'écrit :  $v'v + \omega^2 x + \sigma r v^2 = 0 \iff v' + \sigma r v = -\omega^2 x v^{-1}$

donc c'est une équation de Bernoulli,  $\alpha = -1$  **2 points**

2. Posons  $z = v^2 \implies z' = 2v v'$

$$(2) \implies \frac{z'}{2} + \sigma r z = -\omega^2 x$$

$$\text{ESM} \quad \frac{z'}{2} + \sigma r z = 0 \iff \frac{1}{2} \frac{dz}{dx} = -\sigma r z \iff \frac{dz}{z} = -2\sigma r dx$$

$$\int \frac{dz}{z} = -2\sigma r \int dx \implies \ln z = -2\sigma r x + C \text{ soit } z = K e^{-2\sigma r x} \quad \text{5 points}$$

**EASM** On propose la solution particulière  $z = f(x) e^{-2\sigma r x}$  donc  $z' = f' e^{-2\sigma r x} - 2\sigma r f e^{-2\sigma r x}$  **2 points**

$$\frac{z'}{2} + \sigma r z = -\omega^2 x \implies \frac{1}{2} (f' e^{-2\sigma r x} - 2\sigma r f e^{-2\sigma r x}) + \sigma r f e^{-2\sigma r x} = -\omega^2 x$$

On trouve :  $\frac{1}{2} f' e^{-2\sigma r x} = -\omega^2 x$  alors  $f' = -2\omega^2 x e^{2\sigma r x}$

$$f(x) = -2\omega^2 \int x e^{2\sigma r x} dx = \frac{\omega^2}{2r^2 \sigma^2} (1 - 2\sigma r x) e^{2\sigma r x}$$

$$z_p = \frac{\omega^2}{2r^2 \sigma^2} (1 - 2\sigma r x) e^{2\sigma r x} e^{-2\sigma r x} = \frac{\omega^2}{2r^2 \sigma^2} (1 - 2\sigma r x) \quad \text{5 points}$$

La solution générale de l'EASM est :  $z(x) = K e^{-2\sigma r x} + \frac{\omega^2}{2r^2 \sigma^2} (1 - 2\sigma r x)$  **2 points**

$$v(x) = \pm \sqrt{K e^{-2\sigma r x} + \frac{\omega^2}{2r^2 \sigma^2} (1 - 2\sigma r x)}$$

$$v(0) = 0 \iff K + \frac{\omega^2}{2r^2 \sigma^2} = 0 \implies K = -\frac{\omega^2}{2r^2 \sigma^2} \quad \text{3 points}$$

on obtient :  $v(x) = \pm \sqrt{-\frac{\omega^2}{2r^2 \sigma^2} e^{-2\sigma r x} + \frac{\omega^2}{2r^2 \sigma^2} (1 - 2\sigma r x)}$  soit finalement :

$$v(x) = \pm \frac{\omega}{2r\sigma} \sqrt{1 - 2\sigma r x - e^{-2\sigma r x}} \quad \text{2 points}$$

### Exercice 4 (25 points) Traiter au choix une question, parmi les deux suivantes

1. Soit la série entière en  $x$ ,  $S(x) = \sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$

- (a) Déterminer le rayon de convergence et le domaine de convergence de  $S(x)$
- (b) Trouver dans le domaine ouvert de convergence de  $S(x)$ , la somme de la série dérivée  $S'(x)$ , en déduire la somme  $S(x)$ .
- (c) Développer en série entière la fonction  $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$  et préciser le domaine de convergence de cette série. Déduire la valeur de la série numérique  $\sum_{n \geq 0} \left( \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{2n+1}} \right)$

2. Soit l'intégrale

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{3 + \sin x}$$

- (a) Calculer l'intégrale  $J(t) = \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 3}$
- (b) Soit  $\varphi(\theta) = \arctan \theta + \arctan \frac{1}{\theta}$  Montrer que  $\varphi(\theta) = \text{const.} = \frac{\pi}{2}$
- (c) On utilisant le changement de variable :  $t = \tan \frac{x}{2}$ . Calculer  $I$ .

### SOLUTION 4

1.  $S(x) = \sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$

(a)  $u_n = \frac{x^n}{n(n-1)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)n} \frac{n(n-1)}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n-1}{n+1} x \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-1}{n+1} \right) |x| = |x|$$

La série converge si  $|x| < 1$  et elle diverge si  $|x| > 1$  donc  $R = 1$ . 3 points

Si  $x = 1$  :  $S(x) = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)} \sim \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2}$ , d'après Riemann ; la série converge 2 points

Si  $x = -1$  :  $S(x) = \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$  série alternée avec  $\frac{1}{n(n-1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  la série converge 2 points

Alors le domaine de convergence est :  $D = [-1, 1]$  1 point

(b)  $S'(x) = \sum_{n \geq 2} \frac{nx^{n-1}}{n(n-1)} = \sum_{n \geq 2} \frac{x^{n-1}}{n-1} = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots = -\ln(1-x)$  2 points

$$S(x) = -\int_0^x \ln(1-t) dt$$

Par parties :  $\begin{cases} u = \ln(1-t) & \implies du = -\frac{dt}{1-t} \\ dv = dt & \implies v = t \end{cases}$  2 points

$$S(x) = -t \ln(1-t) \Big|_0^x - \int_0^x \frac{tdt}{1-t} = x + \ln(x-1) - x \ln(1-x)$$
 2 points

$$(c) f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2(1-x/2)} \quad \boxed{1 \text{ point}}$$

$$= \sum_{n \geq 0} x^n - \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} (x/2)^n = \sum_{n \geq 0} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n \quad \boxed{2 \text{ points}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+2} - 1}{2^{n+2}} \frac{2^{n+1}}{2^{n+1} - 1} x \right| = |x| \implies R = 1 \quad \boxed{2 \text{ points}}$$

Pour  $x = \pm 1$  :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) (\pm 1) \neq 0$  donc la série diverge alors  $D = ]-1, 1[ \quad \boxed{1 \text{ point}}$

Soit  $x = \frac{1}{2} \in D$  :

$$= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{2n+1}}\right) = \sum_{n \geq 0} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{1}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{(1/2-1)(1/2-2)} = \frac{4}{3} \quad \boxed{5 \text{ points}}$$

$$2. J = \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 3}$$

(a) Pour calculer  $J(t)$ , on va mettre le polynôme du dénominateur sous forme canonique :

$$3t^2 + 2t + 3 = 3 \left(t^2 + \frac{2}{3}t + 1\right) = 3 \left(\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + 1 - \frac{1}{9}\right) = 3 \left(\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}\right) \quad \boxed{3 \text{ points}}$$

$$J(t) = \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 3} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)^2} \quad \boxed{3 \text{ points}}$$

$$\text{On a } \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$$

$$\text{donc } J(t) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{\sqrt{8}} \arctan \frac{t + 1/3}{\sqrt{8}/3}\right) = \frac{1}{\sqrt{8}} \arctan \frac{3t + 1}{\sqrt{8}} + C \quad \boxed{4 \text{ points}}$$

$$(b) \varphi(\theta) = \arctan \theta + \arctan \frac{1}{\theta} \implies \varphi'(\theta) = \frac{1}{1 + \theta^2} + \frac{-1/\theta^2}{1 + (1/\theta)^2} = 0 \quad \boxed{2 \text{ points}}$$

$$\text{Donc } \varphi(\theta) = \text{const.}, \text{ en particulier } \varphi(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \boxed{3 \text{ points}}$$

$$(c) t = \tan(x/2) \text{ donc } dx = \frac{2dt}{1+t^2} \text{ et } \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ si } x = \pm \frac{\pi}{2} \text{ alors } t = \pm 1 \quad \boxed{3 \text{ points}}$$

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{3 + \sin x} = \int_{-1}^1 \frac{1}{3 + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int_{-1}^1 \frac{2dt}{3 + 2t + 3t^2} = 2J(t)|_{-1}^1 = 2(J(1) - J(-1))$$

$\boxed{3 \text{ points}}$

$$= \frac{2}{\sqrt{8}} \left(\arctan \frac{3+1}{\sqrt{8}} - \arctan \frac{-3+1}{\sqrt{8}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\arctan \sqrt{2} + \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad \boxed{4 \text{ points}}$$

$(\theta = \sqrt{2})$

