Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Calcul différentiel et intégral- MVA005

Examen Partiel 2010-2011 Semestre I

Documents interdits **Durée : 2: 00 h**

Sujet coordonné par : Dr. Noureddine ASSAAD

Proposé pour les centres de: Beyrouth, Baakline, Baalbek, Ghazza,Tripoli, Bickfaya

---

Partie A: Traiter au choix <u>un</u> exercice

Exercice A 1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les intégrales*

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad et \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx$$

1. Calculer I_1 et J_1
2. Montrer que $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ et $0 \leq J_n \leq \dfrac{1}{n+3}$
3. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, qu'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$I_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{(n+1)} J_n$$
4. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} (nI_n)$

Exercice A 2 *Soit F la fonction définie par :*

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

1. Exprimer $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{1+x^2}$ au moyenne de de la fonction F.
2. Exprimer $\displaystyle\int xF(x)\, dx$ au moyenne de de la fonction F.
3. Calculer la dérivée de $\dfrac{x}{1+x^2}$, et en déduire une expression de $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ au moyenne de la fonction F.

   Plus généralement, trouver une relation liant $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ avec I_{n+1} où $n \in \mathbb{N}$

Partie B: Traiter au choix <u>un</u> exercice

Exercice B 1 *Soit f la fonction définie par :*

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x+1|} - 1}{x}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f
2. Peut-on prolonger f par continuité en 0? Si oui, soit g son prolongement en 0.
3. Montrer que g est dérivable en 0.

Exercice B 2 *Considérons les fonctions f et g définient par :*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & si \quad x \in \left]-\infty, 1\right[\\ \dfrac{1}{x} & si \quad x \in \left]1, +\infty\right[\end{cases} \quad et \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \cos\dfrac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $f(x)$ satisfait aux hypothèses des A.F. sur $[0, 2]$ et déterminer la valeur de c telle que : $f(2) - f(0) = 2f'(c)$
2. La fonction $g(x)$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Etudier la continuité de la fonction $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie C: Exercices obligatoires

Exercice C 1 *Calculer les inégrales suivantes:*

1. $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$
2. $J = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$

Exercice C 2 *Montrer que l'aire comprise entre le graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, l'axe des x, et les deux droites $x = 1$ et $x = C(C > 1)$ n'a pas de limite quand $C \to \infty$. Mais que le volume de révolution obtenu par rotation complète de cette aire autour de l'axe des x a une limite.*

Exercice C 3 *On rappelle que, pour tout nombre réel x :* $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ *et* $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
Soit $f(x) = \coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$.

1. Etudier les variations de $f(x)$ et tracer son graphe (C) dans un repère orthonormé.
2. Ecrire l'équation de la tangente et celle de la normale à (C) au point d'abscisse $\ln 2$.
3. Soit (γ) l'arc de (C) défini par $y = \coth x$ avec $\ln 2 \leq x \leq \ln 3$ et soit L la longueur de (γ) . Calculer $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\sinh^2 x}$. En déduire que $L \leq \dfrac{5}{12}$.