Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Calcul différentiel et intégral- MVA005

Examen Partiel 2011-2012 Semestre I

Durée : 2: 00 h

Documents, téléphones, ordinateurs : strictement interdits

Sujet coordonné par : Dr. Noureddine ASSAAD

Proposé pour les centres de: Beyrouth, Baakline, Baalbek, Ghazza,Tripoli, Bickfaya, Nahr Ibrahim

---

Exercice 1 *On considère les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ définies par:*

$$\begin{aligned} f(x) &= |x| + |x-1| + |x-2| \\ g(x) &= \sqrt{|1+x|} - \sqrt{|1-x|} \end{aligned}$$

1. Donner pour chacun des intervalles : $]-\infty, 0]\,, [0,1]\,, [1,2]\,, [2,+\infty[$ une expression de $f(x)$ sans valeurs absolues.

2. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$.

3. Tracer la courbe de $f(x)$.

4. Quel est le domaine de definition de $g(x)$? Est-elle paire ? impaire ? Expliquer pourquoi elle est continue sur $\mathbb{R}$.

5. Donner, pour chacun des intervalles ouverts $]-\infty,-1[\,,]-1,1[\,,]1,+\infty[$ une expression de $g(x)$ sans valeur absolue, puis calculer $g'(x)$,la dérivée de $g(x)$ sur chacun des trois intervalles.

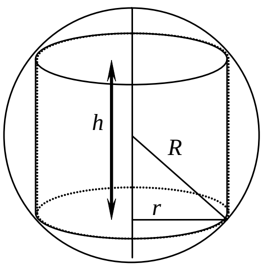
6. Calculer: *a)* $\lim\limits_{x\to -1^-} g'(x)$ *b)* $\lim\limits_{x\to -1^+} g'(x)$ *c)* $\lim\limits_{x\to 1^-} g'(x)$ *d)* $\lim\limits_{x\to 1^+} g'(x)$

7. On donne, pour $a > 0$ et $b > 0$: $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

   Que vaut $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$.

8. Déterminer au point $x_0 = 0$, les équations de la tangente et de la normale, déduire les longeurs de tangente, et sous tangente.

Exercice 2 *Un cylindre de rayon r et de hauteur h, est inscrit dans une sphère de rayon R.Le milieu de l'axe du cylindre se trouve au centre de la sphère.*



Trouver, en fonction de R, le rayon r et la hauteur h du cylindre de plus grand volume possible.Calculer r et h pour $R = \sqrt{3}$.

Exercice 3 *:*

1. Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

$$I = \int \frac{dt}{t^2\,(1-t)} \quad et \quad J = \int \frac{du}{u^3\,(1-u^2)}$$

2. Déduire de ce qui précède les intégrales suivantes

$$K_1 = \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} \quad et \quad K_2 = \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}.$$

3. On pose $K_1 = \int \frac{dx}{\sin^3(2x)}$.Exprimer K en fonction deK_1 et K_2, et en déduire K.

Exercice 4 *L'objectif de cet exercice est de calculer l'intégrale indéfinie suivante*

$$I = \int \frac{x^3}{(1+x^3)^2}dx$$

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante : $\frac{1}{(1+x)\,(1-x+x^2)}$.
   En déduire: $J = \int \frac{dx}{1+x^3}$
2. Calculer $K = \int \frac{x^2 dx}{(1+x^3)^2}$
3. En utilisant une intégration par parties déduire la valeur de I.