Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Calcul différentiel et intégral- MVA005

Examen Partiel 2012-2013 *Mardi 18/12/2012* **Durée : 2: 00 h**

Documents, téléphones, ordinateurs : strictement interdits

Sujet coordonné par : Dr. Noureddine ASSAAD

Proposé pour les centres de: Beyrouth, Baakline, Baalbek, Ghazza,Tripoli, Bickfaya, Nahr Ibrahim

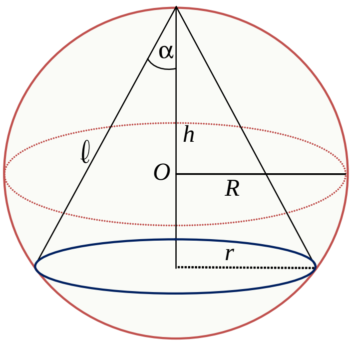
---

Exercice 1 *On considère la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & si \quad x < 2 \\ a & si \quad x = 2 \\ x^2 + b & si \quad x > 2 \end{cases}$$

1. Déterminer les valeurs de a et b pour que la fonction $f(x)$ soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. Pour les valeurs de a et b ainsi trouvées, tracer le graphe (C_f) de $f(x)$.
3. Déterminer le point $M_1(x_1, y_1)$, où la tangent à C_f est parallèle à la droite $y + 2x = 1$.
4. Déterminer le point M_2,où la normale à C_f est perpendiculaire à la droite $4y - 2x = 1$.
5. Calculer au point M_2 les longueurs de la normale et de la sous-normale.

Exercice 2 *On considère la sphère Σ de centre O et de rayon $R = 1$. On voudrait mettre à l'intérieur de Σ la partie principale d'un cône, dont le sommet est le pôle nord de Σ. On suppose que le rayon de base du cône est r, sa hauteur est $h \in [1, 2]$ et sa directrice est de longueur ℓ. On rappelle que l'aire d'un tel cône est $S = \pi r \ell$ et le volume est $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. L'objectif de cet exercice est de mettre un cône de surface maximale dans la sphère.*



1. Montrer que $r^2 = 2hR - h^2$ où $R = 1$ est le rayon de la sphère.
2. Déduire que $S^2 = 2\pi^2(2h^2 - h^3)$.
3. Quels doivent être h, r et ℓ si S est maximale?
4. Les valeurs ainsi trouvées de h et r, correspondent -ils à un volume maximal du domaine intérieur au cône? Justifier!
5. Trouver l'aire maximale du cône qu'on peut insérer dans la shpère.

Exercice 3 *On considère la fonction définie sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ *par :* $f(x) = \sqrt{x} \tan x$.

1. Calculer la dérivée de $f(x)$. En déduire que $f(x)$ est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
2. Donner le tableau de variations de $f(x)$ et l'allure de son graphe(C_f) sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
3. En intégrant par parties, calculer $I = \int f^2(x)\, dx$
4. En déduire le volume du solide engendré par la révolution autour de l'axe Ox,du domaine limité par l'axe Ox, la courbe C_f et les droites $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 4 *On considère les fonctions*

$$f(x) = \frac{2}{1 - x^2} - \frac{3}{1 - x^3} \quad \textit{et} \quad g(x) = e^{3x}$$

1. Caluler : $\lim_{x \to 1} f(x)$
2. Calculer l'intégrale: $I = \int f(x)\, dx$.
3. Calculer $g'(1)$ la dérivée de $g(x)$ au point $x_0 = 1$
4. En utilisant la définition, de la dérivée de $g(x)$ au point $x_0 = 1$, déduire $\lim_{x \to 1} \frac{e^{3x} - e^3}{x^3 - 1}$
5. Soit a un réel positif, donné, Calculer l'intégrale:

$$J = \int \frac{dx}{x^2 + ax}$$

et déduire : $K = \int \frac{dx}{e^{3x} - e^3}$ *et* $L = \int \frac{dx}{(\sin x + 3) \tan x}$