



Calcul différentiel et intégral - MVA005

Examen Partiel 2014-2015-Semestre I Durée : 1h :30

centres de : Beyrouth, Baakline, Baalbek, Ghazza, Tripoli, Bickfaya, Nahr Ibrahim



Documents et Téléphones : STRICTEMENT INTERDITS

Exercice 1 (20 points) : On veut calculer

$$a = \sqrt{-\frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{1}{4} + \dots}}}}$$

On introduit la suite récurrente u_n de premier terme $u_0 > \frac{1}{4}$ telle que

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n - \frac{1}{4}}$$

1. Montrer que u_n est monotone et minorée.
2. La suite u_n est-elle convergente ? justifier.
3. Calculer, si elle existe, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
4. Quelle la valeur de a ?

Exercice 2 (25 points) Soit $f = f(x)$ la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt[3]{1+x+x^2+x^3} - \sqrt{1+x+x^2}$$

1. Donner le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 2.
2. Déduire l'équation de la tangente à la courbe de f au point $x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$
3. En déduire l'équation d'une droite asymptote au graphe de f en $+\infty$
4. Déterminer une équation de l'asymptote f en $-\infty$ et ainsi que la position de cette asymptote par rapport à la courbe.

Exercice 3 (20 points) Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin ax)^{1/x}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$

Exercice 4 (15 points) Soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité et la dérivabilité de $f_n(x)$ dans les trois cas suivants :

1. $n = 0$ | 2. $n = 1$ | 3. $n = 2$

Exercice 5 (20 points) Soient un miroir plan, (S) une source de la lumière située sur l'axe Oy ($OS = a$) et $A(\ell, b)$ un œil qui regard dans le miroir. Trouver la position du point $M(x, 0)$ où le rayon frappe le miroir pour aller ensuite dans l'œil, sachant que la lumière suit **le chemin le plus court**.

En déduire que l'angle d'incidence (i) est égal à l'angle de réflexion (r).

