Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban
le cnam

Calcul différentiel et intégral - MVA005

Examen Partiel 2014-2015-Semestre II **Durée : 1h :30**

Documents et Téléphones : STRICTEMENT INTERDITS

Exercice 1 (4 points) :

Soit a un réel donné. Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x} & si \quad x > 0 \\ \dfrac{x+a}{x-2} & si \quad x < 0 \end{cases}$$

1. Déterminer a tel que f soit prolongeable par continuité au point $x = 0$. soit g son prolongement.(1.5)
2. Déterminer $g'(x)$ pour $x \neq 0$. (1)
3. La fonction g est-elle différentiable au point $x = 0$? Justifier votre réponse.(1.5)

Solution 1

1. $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt{1+x} = 1$ $\boxed{\frac{1}{4}\text{ point}}$ et $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x+a}{x-2} = -\dfrac{1}{2}a$ $\boxed{\frac{1}{4}\text{ point}}$

   f est prolongeable par continuité au point $x = 0$ si $-\dfrac{1}{2}a = 1$ donc si $a = -2$ $\boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$

   son prolongement est

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x} & si \quad x > 0 \\ 1 & si \quad x < 0 \end{cases} \quad \boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$$

2. Pour $x > 0$: $g'(x) = \left(\sqrt{1+x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ $\boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$

   Pour $x < 0$: $g'(x) = (1)' = 0$ $\boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$

3. $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \dfrac{1}{2}$ donc g est dérivable à droite et $g'(0^+) = \dfrac{1}{2}$ $\boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$

   $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-1}{x} = 0$ donc g est dérivable à gauche et $g'(0^-) = 0$ $\boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$

   finalement $g(x)$ n'est pas dérivable en $x = 0$, car $g'(0^+) \neq g'(0^+)$ $\boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$

Exercice 2 (2.5 points) :
Soit $c \in \mathbb{R}$ et f une fonction dérivable au point c. Calculer :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+3h) - f(c - \frac{h}{2})}{2h}$$

Solution 2

f une fonction dérivable au point c c.à.d. $f'(c)$ existe ; $\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c)$ $\boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+3h) - f(c - \frac{h}{2})}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+3h) - f(c)}{2h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(c) - f(c - \frac{h}{2})}{2h} \boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{h \to 0} \frac{f(c+3h) - f(c)}{3h} + \frac{1}{4} \lim_{h \to 0} \frac{f(c) - f(c - \frac{h}{2})}{h/2} \boxed{1\text{ point}}$$

$$= \frac{3}{2} f'(c) + \frac{1}{4} f'(c) = \frac{7}{4} f'(c) \boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$$

Exercice 3 (5 points) :

1. (a) Etudier les variations de $f(x) = x - 1 - \ln(x)$. (1)
   (b) En déduire que $\ln(x) \leq x - 1;\ \forall x > 0$. (0.5)
2. Soit $x > 0$.
   En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $g(t) = t\ln(t)$ sur $[1, 1+x]$, montrer que (2.5)
   $$1 < \frac{(1+x)\ln(1+x)}{x} < 1 + x$$
   (Vous pouvez utiliser 1.b))
3. En déduire que (1)
   $$\lim_{t \to 0} \frac{2\ln(\cos ht)}{\tan h^2 t} = 1$$

Solution 3

1. (a) $f(x)$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$ $\boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$ et elle est dérivable sur cet intervalle ,

   on a $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ $\boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$

   Table de Variations :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	1	$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

   $\boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$

   (b) D'après le tableau de variation , le minimum de f est 0, donc $f(x)$ est toujours positive,

   et $\ln(x) \leq x - 1;\ \forall x > 0$ $\boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$

2. Soit $x > 0$.

   La fonction $g : t \mapsto t \ln t$ est continue sur $[1, 1+x]$ et dérivable sur $]1, 1+x[$, $\boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$

   d'après le théorème de la valeur moyenne, il existe $c \in]1, 1+x[$ tel que $\dfrac{g(1+x) - g(1)}{(1+x) - 1} = g'(c)$ $\boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$ alors $\dfrac{(1+x)\ln(1+x)}{x} = 1 + \ln c$ $\boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$

   Mais $1 < c < 1+x$ et $x \mapsto \ln x$ est strictement corissante par suite $\ln 1 < \ln c < \ln(1+x)$ on déduit : $\ln 1 < \ln c + 1 < \ln(1+x) + 1$ $\boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$

   d'après $(1b)$ on a $\ln(1+x) + 1 \leq 1 + x$ donc $1 < \dfrac{(1+x)\ln(1+x)}{x} < 1 + x$ $\boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$

3. On a
$$\frac{2\ln\cosh t}{\tanh^2 t} = \frac{\ln\cosh^2 t}{\tanh^2 t} = \frac{\left(1+\sinh^2 t\right)\ln\left(1+\sinh^2 t\right)}{\sinh^2 t} \boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$$

   et :
$$1 < \frac{2\ln\cosh t}{\tanh^2 t} < 1 + \sinh^2 t$$

   ce qui implique $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2\ln\cosh t}{\tanh^2 t} = 1$ $\boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$

Exercice 4 (3.5 points) :
Un fil de longueur L est à utiliser pour faire un rectangle des dimensions $x \times y$ et un triangle équilatéral de côté x.
Comment le fil doit être divisé pour que la somme des deux aires du rectangle et du triangle soit maximale ?

Solution 4

Le perimètre du rectangle est $L_1 = 2x + 2y$ et celui du triangle est $L_2 = 3x$ donc $L = 2x + 3y + 3x = 5x + 2y$ $\boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$ soit donc $y = \dfrac{L - 5x}{2}$

Laire du rectangle est $S_1 = xy = \dfrac{xL - 5x^2}{2}$ et celle du triangle est $S_2 = \dfrac{1}{2}xh = \dfrac{1}{2}x\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$

$S = S_1 + S_2 = \dfrac{xL - 5x^2}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{5}{2}\right)x^2 + \dfrac{L}{2}x$ $\boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$

$\dfrac{dS}{dx} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 5\right)x + \dfrac{L}{2}$ $\boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$

$\dfrac{dS}{dx} = 0$ $\boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$ $\Longrightarrow x = \dfrac{L}{10 - \sqrt{3}}$ $\boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$

x	0		$\frac{L}{10-\sqrt{3}}$		L
S'	||	$+$	0	$-$	
S	||	$\nearrow$	Max	$\searrow$	

$\boxed{1\text{ point}}$

Exercice 5 (5 points) :
Soit

$$f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x \sin x}}$$

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 de $\dfrac{1}{x \sin x} \ln(\cos x)$ au voisinage de 0.
2. Donner le développement limité à l'ordre 2 de $f(x)$ au voisinage de 0.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité au point 0. soit g son prolongement.
4. Définir g et déterminer $g'(0)$.
5. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse $x = 0$ et préciser sa position par rapport à la courbe au voisinage de $x = 0$.

Solution 5

1. Au voisinage de $x = 0$ on a

$$\begin{cases} \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + x^3\varepsilon(x) \\ \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x) \end{cases} \quad \boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$$

$$\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{4!}\right) + x^4\varepsilon(x)$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + x^4\varepsilon(x) \boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + x^4\varepsilon(x) \boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$$

Par suite $\dfrac{1}{x \sin x} \ln(\cos x) = \dfrac{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12}}{x^2 - \frac{x^4}{6}} + x^2\varepsilon(x) = -\dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{x^2}{3}\right) + x^2\varepsilon(x) \boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$

2. Au voisinage de $x = 0$,jusqu'à l'ordre2 on a

$$f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x \sin x}} = \exp\left(\frac{\ln(\cos x)}{x \sin x}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)\right) + x^2\varepsilon(x) \boxed{1\text{ point}}$$

$$= e^{-1/2}e^{-x^2/2} + x^2\varepsilon(x) = e^{-1/2}\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) + x^2\varepsilon(x) \boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$$

3. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ alors f est prolongeable par continuité au point 0

4. $g(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{e}} & si \quad x = 0 \end{cases} \boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$

5. $g'(0) = 0$ l'équation de la tangente

l'équation de la tangente $y = \dfrac{1}{\sqrt{e}} \boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$

$g(x) - y \simeq -\dfrac{x^2}{6\sqrt{e}} < 0$ donc la tangente est au déssous de la courbe $\boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$