Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Centre du Liban Associé au
Conservatoire Nationale des Arts et Métiers – Paris

Calcul Différentiel et Intégral MVA005

Examen de Rattrapage 2008-2009 **Durée 3h**

Documents interdits

Partie A : Traiter au choix 3 exercices seulement (3 points pour chaque exercice)

Exercice A1 : Soit $I = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$

1. Montrer, en utilisant un convenable changement de variables, que $I = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$.
2. Déduire la valeur de I.
3. Déduire les valeurs de: $J = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\tan^2 x}$ et $K = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cot^2 x}$.

Exercice A2 : Montrer que :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & \textit{pour } x \neq 0 \\ 0 & \textit{pour } x = 0 \end{cases}$$

est continument dérivable et étudier sa dérivée seconde en $x = 0$

Exercice A3 : Montrer que pour tout réel positif x on a

$$\arctan(x+1) - \arctan x = \arctan \frac{1}{x^2+x+1}$$

en déduire la convergence et la somme de la série de terme général $U_n = \arctan \frac{1}{1+n+n^2}$.

Exercice A4 : On considère l'intégral $H = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin 2x} dx$

1. Calculer $(\sin x - \cos x)^2$ en fonction de $\sin 2x$. Calculer H
2. On considère les intégrales :

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\, dx, \qquad J = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\, dx \quad \text{et} \quad K = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx$$

Montrer que $I = J = \frac{1}{2}K$. Déduire que $I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

Exercice A5 : On considère la fonction $f(x) = \arccos x$

1. Tracer le graphe (C) de la fonction $f(x)$ pour $-1 \leq x \leq 1$.
2. Calculer le volume de corps de révolution de la courbe (C), limitée par $-1 \leq x \leq 1$ par rotation :
   (a) Autour de l'axe Ox.
   (b) Autour de l'axe Oy.

Exercice A6: On considère la fonction $f(x)$ définie par $f(x) = (x^2+1)\sin x - 1$.

1. Préciser le domaine de définition de f et étudier sa continuité sur son domaine de définition.
2. Montrer que l'équation $(x^2+1)\sin x = 1.$ admet une infinité de racines dans $\mathbb{R}$.

Partie B : Exercices obligatoires

Exercice B1 (5 points) Soient a et b deux nombres réels et n un entier naturel; $n \neq 1$.

On considère l'équation différentielle suivante:

$$y' = ay + by^n \tag{E}$$

On se propose dans cet exercice de rechercher les solutions strictement positifs de (E) dans $\mathbb{R}$.

1. On pose sur $\mathbb{R}$: $z = y^{1-n}$. Déterminer une équation différentielle satifaite par z et la résoudre.
2. En déduire les solutions strictement positfs de (E) sur $\mathbb{R}$.
3. Que donne le cas $n = 0$?

Exercice B2 (6 points) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = 2e^x - 2 - xe^x \tag{1}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Conclure.
2. Déterminer la dérivée de f, en déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.
3. Former le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de zéro de f.
4. En déduire l'équation de la tangente (Δ) à (C) en son point d'abscisse zéro et déterminer la position de (C) par rapport à (Δ) au voisinage de ce point.
5. Tracer (C) et (Δ) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On donne: $f(1,6) \simeq 0$.