Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

Calcul différentiel et intégral- MVA005

Examen de rattrapage 2010-2011 Semestre I

Documents et téléphones interdits **Durée : 3: 00 h**

Sujet coordonné par : Dr. Noureddine ASSAAD

Proposé pour les centres de: Beyrouth, Baakline, Baalbek, Ghazza,Tripoli, Bickfaya

---

Exercice 1 *Soit la fonction*

$$f(x) = \frac{e^x \sin x - \ln(1+x)}{x^2}.$$

1. Déterminer son dévoloppement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0.
2. Montrer que f et prolongeable par continuité en 0.
3. Montrer que le prolongement de f est dérivable en 0.

Solution 1 :

1. $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + O\left(x^4\right)$

   $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O\left(x^5\right)$

   $$e^x \sin x = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + O\left(x^4\right)\right)\left(x - \frac{1}{6}x^3 + O\left(x^5\right)\right)$$
   $$= x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + O\left(x^5\right)$$

   $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + O\left(x^5\right)$

2. $$f(x) = \frac{\left(x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + O\left(x^5\right)\right) - \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + O\left(x^5\right)\right)}{x^2}$$
   $$= \frac{\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + x^4 O(x)}{x^2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}x^2 + x^2 O(x)$$

3. $$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}x^2 + x^2 O(x)\right) = \frac{3}{2}.$$

   $f(x)$ n'est pas définie en $x = 0$, mais sa limite existe en ce point. donc f et polongeable par continuité en 0.

   Son prolongement est donné par $g(x) = f(x)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = \frac{3}{2}$.

4. $g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \frac{3}{2}}{x}$
   $= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{4}x^2 + x^2 O(x) - \frac{3}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{4}x^2 + x^2 O(x)}{x}$
   $= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{4}x + xO(x)\right) = 0.$
   Donc le prolongement de f est dérivable en 0.

Exercice 2 *On définit la suite récurrente* (u_n) *par*

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \text{ avec } u_0 = 1.$$

1. Montrer par récurrence que cette suite est positive, croissante et majorée par 3.
2. En déduire qu'elle est convergente et trouver sa limite.

Solution 2 *Soit* $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$ *avec* $u_0 = 1$.

1. $u_0 = 1 > 0$. Supposons que $u_n > 0 \Longrightarrow 2u_n + 3 > 0 \Longrightarrow u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} > 0$
   $u_1 - u_0 = \sqrt{5} - 1 > 0$. Supposons que $u_n - u_{n-1} > 0 \Longrightarrow$
   $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n + 3} - \sqrt{2u_{n-1} + 3}$
   $= \frac{(\sqrt{2u_n + 3} - \sqrt{2u_{n-1} + 3})(\sqrt{2u_n + 3} + \sqrt{2u_{n-1} + 3})}{\sqrt{2u_n + 3} + \sqrt{2u_{n-1} + 3}}$
   $= \frac{2u_n + 3 - 2u_{n-1} - 3}{\sqrt{2u_n + 3} + \sqrt{2u_{n-1} + 3}} = \frac{2(u_n - u_{n-1})}{\sqrt{2u_n + 3} + \sqrt{2u_{n-1} + 3}} > 0.$
   Donc u_n est croissante.
   $u_0 = 1 < 3$. Supposons que $u_n < 3 \Longrightarrow 2u_n + 3 < 9 \Longrightarrow u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} < 3$.
2. u_n est croissante et majorée, donc elle est convergente vers l telle que
   $$l = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1}$$
   On a: $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \Longrightarrow l = \sqrt{2l + 3} \Longrightarrow l^2 = 2l + 3$
   $\Longrightarrow l^2 - 2l - 3 = 0 \Longrightarrow l = -1, l = 3 \Longrightarrow l = 3$ (car $l > 0$).

Exercice 3 *On considère l'intégrale*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$$

1. Montrer, en faisant un changement convenable de variable, que
   $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$$
2. Déduire la valeur de l'intégrale I.

Solution 3 :

1. On pose $x = \frac{\pi}{2} - t \Longrightarrow dx = -dt$

   $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$ et $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t$

   Pour $x = 0 \Longrightarrow t = \frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow t = 0.$

   Donc $I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin^3(\frac{\pi}{2} - t)}{\sin^3(\frac{\pi}{2} - t) + \cos^3(\frac{\pi}{2} - t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 t}{\cos^3 t + \sin^3 t} dt$

2. $I + I = 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$

   $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow I = \frac{\pi}{4}.$

Exercice 4 *Soit $f(x)$ une fonction dérivable au point $x = a$. Calculer*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h^2) - f(a + h)}{h}$$

Solution 4 : *Soit* $A(h) = \frac{f(a + h^2) - f(a + h)}{h}$,

cet expression s'écrit:

$$A(h) = \frac{f(a + h^2) - f(a + h)}{h} = \frac{f(a + h^2) - f(a) - (f(a + h) - f(a))}{h}$$

$$= \frac{f(a + h^2) - f(a)}{h} - \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Comme $f(x)$ est dérivable en a alors $\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a)$

Il suffit donc d'étudier $\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h^2) - f(a)}{h}$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h^2) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} h \left(\frac{f(a + h^2) - f(a)}{h^2} \right)$$

$$= \left(\lim_{h \to 0} h \right) \left(\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h^2) - f(a)}{h^2} \right) = (0)(f'(a)) = 0$$

Par suite $\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h^2) - f(a + h)}{h} = 0 - f'(a) = -f'(a)$

Exercice 5 *On donne l'équation différentielle*

$$xy' + y = (xy)^{3/2} \tag{E}$$

1. En utilisant un changement de variable convenable, transformer cette équation en une équation différentielle linéaire que l'on va noter (F)

2. Résoudre l'équation (F) et déduire la solution générale de (E)

Solution 5 *:*

1. $xy' + y = (xy)^{3/2} \rightarrow xy' + y = x^{3/2}y^{3/2}$ divisons par $y^{3/2} \rightarrow xy^{-3/2}y' + y^{-1/2} = x^{3/2}$
   Posons $z = y^{-1/2}$ alors $z' = -\frac{1}{2}y^{-3/2}y' \Longrightarrow y'y^{-3/2} = -2z$ et l'équation devient:
   $$-2xz' + z = x^{3/2} \tag{F}$$
   c'est une équation linéaire du premier ordre en z.
2. <u>*ESSM*</u>:
   $-2xz' + z = 0 \Longrightarrow 2x\frac{dz}{dx} = z \rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{2x}$
   En intégrant les deux membres on trouve : $\ln z = \frac{1}{2}\ln x + c \Longrightarrow z_1 = k\sqrt{x}$
   <u>*EASM*</u>: On propose une solution de la forme $z_2 = k(x)\sqrt{x}$
   $z_2 = k(x)\sqrt{x} \Longrightarrow z_2' = k'\sqrt{x} + \frac{k}{2\sqrt{x}}$
   Substituons dans l'EASM (F) :
   $-2xz' + z = x^{3/2} \Longrightarrow -2x\left(k'\sqrt{x} + \frac{k}{2\sqrt{x}}\right) + k\sqrt{x} = x\sqrt{x}$
   $\Longrightarrow -2k' = 1 \Longrightarrow k(x) = -\frac{x}{2} \Longrightarrow z_2 = -\frac{x\sqrt{x}}{2}$
   La solution générale de l'équation (F) est $z(x) = k\sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{2}$
   $z = \frac{1}{\sqrt{y}} \Longrightarrow y(x) = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{\left(k\sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{2}\right)^2}$ soit
   $$y(x) = \frac{4}{x(x-2k)^2}$$

Exercice 6 *Résoudre l'équation différentielle:*

$$y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}$$

en $y(x)$ *et donner la solution qui vérifie les conditions initiales* $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = 3$

Solution 6 *:*

<u>ESSM</u>: $y'' + 3y' + 2y = 0$
L'équation caractéristique : $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ les racines sont : $\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$
La solution générale de l'ESSM est :

$$y_1(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$$

<u>ESSM</u>:
$\lambda = -1$ est une racine simple de l'équation caractéristique : alors une solution particulière de l'EASM doit de la forme : $y_2(x) = (Ax^2 + Bx)e^{-x}$

$y_2' = (-Ax^2 + 2Ax - Bx + B)\, e^{-x}$
$y_2'' = (Ax^2 - 4Ax + Bx + 2A - 2B)\, e^{-x}$
$y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}$
$\Longrightarrow Ax^2 - 4Ax + Bx + 2A - 2B + 3\,(-Ax^2 + 2Ax - Bx + B) + 2\,(Ax^2 + Bx) = x$
$(A - 3A + 2A)\, x^2 + (-4A + B + 6A - 3B + 2B)\, x + 2A - 2B + 3B = x$
$\Longrightarrow \begin{cases} 2A = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{2} \\ B = -1 \end{cases} \Longrightarrow y_2 = \left(\dfrac{x^2}{2} - x\right) e^{-x}$

$$y\,(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x + C_1\right) e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

$y\,(0) = C_1 + C_2 = 0 \Longrightarrow C_1 = -C_2$
$y'\,(x) = (x-1)\, e^{-x} - \left(\dfrac{x^2}{2} - x + C_1\right) e^{-x} - 2C_2 e^{-2x}$
$y'\,(0) = -1 - C_1 - 2C_2 = 3 \Longrightarrow C_1 + 2C_2 = -4$
$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + 2C_2 = -4 \end{cases} \Longrightarrow C_2 = -4 \quad \text{et } C_1 = 4$

$$y_0\,(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x + 4\right) e^{-x} - 4e^{-2x}$$

Exercice 7 *Calculer les intégrales suivantes:*

1. $I = \displaystyle\int_{1/2}^{3/4} \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}$

2. $J = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$

3. $K = \displaystyle\int \sin^4 x \cos^3 x dx$

Solution 7 *:*

1. $I = \displaystyle\int_{1/2}^{3/4} \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}$

   On pose $x = \sin^2 t$ alors $dx = 2 \sin t \cos t dt$

   et $\sqrt{x - x^2} = \sqrt{x\,(1-x)} = \sqrt{\sin^2 t \left(1 - \sin^2 t\right)} = \sin t \cos t$

   $\sin t = \sqrt{x} \Longrightarrow \begin{cases} si \quad x = \dfrac{1}{2} & \Longrightarrow \sin t = \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \Longrightarrow t = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ si \quad x = \dfrac{3}{4} & \sin t = \dfrac{\sqrt{3}}{2} & t = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

   $I = \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{2 \sin t \cos t}{\sin t \cos t} dt = 2 \int_{\pi/4}^{\pi/3} dt = \frac{\pi}{6}$

2. $J = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{x^2+2x+1+4} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4}$

$= \displaystyle\frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{1+x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1+x}{2}\right) + C$

3. $K = \displaystyle\int \sin^4 x \cos^3 x dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x dx$

Soit $t = \sin x \Longrightarrow dt = \cos x dx$

$K = \displaystyle\int \sin^4 x \left(1-\sin^2 x\right) \cos x dx = \int t^4 \left(1-t^2\right) dt$

$= \displaystyle\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + C$